ГЛАВА 7

КРИТЕРИЙ ЗЕЛЬМАНОВА

1. Обобщенный волновой оператор

Критерий существования гравитационных волн, сформулированный в работе [94] [1]) на основе общей идеи Зельманова, предполагает использование следующего *ковариантного обобщения волнового оператора*:

$$\mathsf{D} \equiv -\, g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma. \tag{7.1}$$

Тогда общековариантное волновое уравнение относительно произвольного тензорного поля $Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$ в общем случае будет иметь вид

$$\mathsf{D}Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots} = K^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}, \tag{7.2}$$

где $K^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$ — некоторый тензор, не содержащий производных выше первого порядка от $Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$. Уравнение вида (7.2) применял Толмэн [63] при описании электромагнитных волн в римановом пространстве — времени.

Очевидно, что однородное уравнение типа (7.2) является тривиальным по отношению к метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$, а в случае пространств Эйнштейна — так же и по отношению к тензору Риччи $R_{\alpha\beta}$. Поэтому возникла мысль связать такое уравнение с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, что и было предложено А. Л. Зельмановым. Заметим, однако, что уравнение (7.2) относительно тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{7.3}$$

также оказывается тривиальным (т. е. обращается в тождество) в случае симметрических пространств, для которых тензор Римана ковариантно постоянен, $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} = 0$ (при этом, конечно, должно быть $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$). Кроме того, уравнение (7.3) может обращаться в тождество и при некоторых

---

[1]) Первая (предварительная) публикация исследования гравитационных волн на основе волнового оператора (7.1) относится к 1962 г. (см. предисловие Иваненко к русскому переводу книги Вебера [95]). Впоследствии Рой и Радхакришна [96] независимо предложили определять гравитационные волны путем применения оператора (7.1) к тензору кривизны.

специальных выборах тензора $K_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. Так, если взять

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} R \cdot R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdots\rho} R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdots\sigma} -$$

$$- 2\,(R_{\sigma\delta\alpha\cdot}^{\cdots\rho} R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdots\sigma} + R_{\gamma\sigma\alpha\cdot}^{\cdots\rho} R_{\beta\rho\delta\cdot}^{\cdots\sigma}),$$

то для всех пространств Эйнштейна (3.7) уравнение (7.3) удовлетворяется тождественно [97] (см. также Приложение I, теорема 3).

Таким образом, подходя к представлению о гравитационных волнах на основе уравнения (7.3), необходимо, во-первых, потребовать, чтобы пространство — время V_4 не было симметрическим, а во-вторых — задаться выбором тензора $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Критерий Зельманова основан на предположении [1]), что $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

Критерий Зельманова. *Пространство — время V_4 описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда его тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$* 1) *не является ковариантно постоянным, т. е. $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} \neq 0$,* 2) *удовлетворяет общековариантному волновому уравнению*:

$$\mathbf{D} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \qquad (7.4)$$

2. Характеристики обобщенного волнового уравнения

Для физического обоснования критерия Зельманова, имеющего на первый взгляд несколько формальный и искусственный характер, представляется существенным исследование характеристик тензорных уравнений (7.4) как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных, роль которых играют собственно компоненты тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Как показала Савельева [99], левую часть уравнений (7.4) можно тождественными преобразованиями привести к виду

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\,\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^{\sigma}) + \Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}) +$$

$$+ Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(R^{\sigma}_{\rho}), \qquad (7.5)$$

где введены обозначения:

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^{\sigma}) = -\left[(\Gamma^{\sigma}_{,\gamma} - \Gamma^{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\rho\gamma}) R_{\alpha\beta\sigma\delta} + (\Gamma^{\sigma}_{,\alpha} - \Gamma^{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\rho\alpha}) R_{\sigma\beta\gamma\delta} +\right.$$

$$\left. + (\Gamma^{\sigma}_{,\beta} - \Gamma^{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\rho\beta}) R_{\alpha\sigma\gamma\delta} + (\Gamma^{\sigma}_{,\delta} - \Gamma^{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\rho\delta}) R_{\alpha\beta\gamma\sigma} + \Gamma^{\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}\right],$$

---

[1]) В предположении, что $K_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$, уравнение (7.3) рассмотрено в работе [98].

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}) = (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\gamma} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu})\, R_{\alpha\beta\sigma\delta} +$$
$$+ (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\alpha} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu})\, R_{\sigma\beta\gamma\delta} + (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\beta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu})\, R_{\alpha\sigma\gamma\delta} +$$
$$+ (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\delta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\delta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu})\, R_{\alpha\beta\gamma\sigma} - g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma}R_{\alpha\beta\sigma\delta,\nu} +$$
$$+ \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\delta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\delta,\nu}) + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\sigma,\nu}) -$$
$$- g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma}R_{\alpha\beta\sigma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}R_{\sigma\beta\gamma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}R_{\alpha\sigma\gamma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\delta}R_{\alpha\beta\gamma\sigma,\mu}),$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(R^{\sigma}_{\rho}) = -[R^{\sigma}_{\gamma}R_{\alpha\beta\sigma\delta} + R^{\sigma}_{\alpha}R_{\sigma\beta\gamma\delta} + R^{\sigma}_{\beta}R_{\alpha\sigma\gamma\delta} + R^{\sigma}_{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\sigma}].$$

Здесь, как и прежде, $\Gamma^{\sigma} = -g^{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$. Мы видим, что в тождестве (7.5) член $L_{\alpha\beta\gamma\delta}$ алгебраически выражается через величины Γ^{σ} и их производные, а следовательно, тождественно обращается в нуль при $\Gamma^{\sigma} = 0$, т. е. в гармонической системе координат. Член $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ алгебраически выражается через символы Кристоффеля $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, следовательно, он может быть обращен в нуль в любой заданной точке пространства — времени. Наконец, член $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тождественно равен нулю в пустом пространстве — времени ($R_{\alpha\beta} = 0$).

Пусть в рассматриваемой области пустого пространства — времени введена гармоническая система координат. Тогда в выражениях (7.5) члены $L_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тождественно исчезают. Предположим далее, что выбранная система координат является локально геодезической в некоторой заданной точке M. Тогда в M, во-первых, член $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обращается в нуль и, во-вторых, матрица $\|g^{\rho\sigma}\|$ принимает канонический вид, отвечающий сигнатуре $(+, -, -, -)$ пространства — времени. Таким образом, уравнение (7.4), рассматриваемое как система уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент риманова тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, является уравнением гиперболического типа.

Рассматривая задачу Коши с начальными данными $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta,0}$ на гиперповерхности S вида (2.16) (в локально выбранной системе координат), приведем систему уравнений (7.4) к виду

$$g^{00}R_{\alpha\beta\gamma\delta,00} + \cdots = 0,$$

где точками обозначены члены, не содержащие производных $R_{\alpha\beta\gamma\delta,00}$ и, следовательно, полностью определяемые начальными данными. Отсюда вытекает, что уравнением характеристик для системы уравнений (7.4) в данной системе координат служит уравнение $g^{00} = 0$. Записывая его в общих координатах (аналогично тому, как это было сделано для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве в гл. 2), мы приходим к выводу, что *характеристическая гиперповерхность системы волновых уравнений* (7.4) *совпадает с характеристической гиперповерхностью уравнений Эйнштейна и выражается уравнением* (2.15), *где функция* φ *удовлетворяет уравнению эйконала* (2.22).

Следовательно, общековариантная система волновых уравнений (7.4) в пустом пространстве описывает распространение разрывов вторых производных тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ вдоль бихарактеристик (изотропных геодезических) уравнений Эйнштейна.

Кроме того, из записи (7.5) можно заключить,что в некоторой системе координат (а именно, гармонической) в пустом пространстве в бесконечно малой окрестности заданной точки M общековариантная система (7.4) принимает вид обычной волновой системы уравнений относительно каждой компоненты тензора Римана

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\ \rho\sigma} = 0, \tag{7.6}$$

что непосредственно связывает критерий Зельманова с обычным пониманием «локальных волн кривизны» в окрестности точки M.

3. Критерий Зельманова и классификация Петрова

Для определения типа полей тяготения, удовлетворяющих критерию Зельманова, ограничимся случаем пространств Эйнштейна $^*T_i$:

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{7.7}$$

В пространствах $^*T_i$, как известно, имеет место тождество [97]

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\ \rho\sigma} + R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + 2\left(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} - R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = 0 \tag{7.8}$$

(см. Приложение I, теорема 3). Из тождества (7.8) вытекает очевидный результат: для того чтобы тензор Римана пространства $^*T_i$ удовлетворял уравнениям (7.4), необходимо и достаточно, чтобы этот тензор удовлетворял условиям

$$R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + 2\left(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} - R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = 0. \tag{7.9}$$

Записывая условия (7.9) в бивекторном пространстве R_6 в каноническом неголономном орторепере и используя канонический вид матрицы тензора кривизны (3.11), (3.14) — (3.18), приходим к следующим выводам [100, 101]. Для пространств $*T_1$ условия (7.9) приводят к системе уравнений

$$\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)-\beta_1(\beta_2-\beta_3)=0,$$
$$\beta_1(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_1(\beta_2-\beta_3)=0$$

и еще четырем уравнениям, получающимся из приведенных циклированием по индексам 1, 2, 3. Эти уравнения представляют собой записанные в R_6 условия интегрируемости уравнений

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}=0, \tag{7.10}$$

определяющих симметрические пространства ([65], стр. 399). При этом новая система уравнений, получающаяся путем ковариантного дифференцирования условий интегрируемости, удовлетворяется тождественно в силу исходных уравнений (7.10). Следовательно, любое пространство $*T_1$, определяемое условиями (7.9), является симметрическим пространством.

Для пространств $*T_2$ соотношения (7.9) в каноническом орторепере записываются в виде системы уравнений [101], совместной только при условиях

$$\alpha_1=\alpha_2=0, \quad \beta_1=\beta_2=0, \quad \varkappa=0. \tag{7.11}$$

Как мы видели, эти условия определяют пустое пространство T_2 вырожденного второго типа (тип N диаграммы Пенроуза). Следовательно, пространства $*T_2$, определяемые соотношениями (7.9), могут быть только пространствами T_2 ($\varkappa=0$) типа N.

Обратно, записывая соотношения (7.9) в каноническом орторепере в бивекторном пространстве R_6 и принимая во внимание условия (7.11), можно убедиться, что (7.9) удовлетворяются тождественно, т. е. любое пространство Эйнштейна T_2 типа N удовлетворяет условиям (7.9).

Наконец, записывая условия (7.9) в каноническом орторепере для пространств $*T_3$, убеждаемся, что при любом $\varkappa$ они приводят к противоречию. Это означает, что пространства $*T_3$ не могут удовлетворять условиям (7.9).

Как показал Петров [57], существует только два симметрических пространства $*T_2$; они принадлежат к вырожденному типу 2 пространств T_2 ($\varkappa = 0$) и в специальной системе координат описываются метриками

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 - \operatorname{sh}^2 x^0 {dx^2}^2 - \sin^2(x^0 + k)\, {dx^3}^2, \qquad (7.12)$$
$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \operatorname{ch}^2 x^0 {dx^2}^2 + \cos^2(x^0 + k)\, {dx^3}^2$$
$$(k = \mathrm{const}).$$

Таким образом, *пространства Эйнштейна, удовлетворяющие критерию Зельманова, могут быть только пустыми пространствами* V_4 ($\varkappa = 0$) *типа* N по Петрову. Обратно, любое пустое пространство — время типа N, за исключением двух симметрических пространств (7.12), удовлетворяет критерию Зельманова.

4. Связь между критериями Зельманова и Лихнеровича. Примеры

На основании алгебраической классификации Петрова нетрудно выяснить, как связаны между собой критерии Зельманова и Лихнеровича в случае пустых V_4. Мы уже знаем, что свободные гравитационные волны в смысле Лихнеровича отвечают полям типа N на диаграмме Пенроуза. Следовательно, *любое пустое* V_4, *удовлетворяющее критерию Зельманова, удовлетворяет и критерию Лихнеровича. Обратно, любое пустое* V_4, *удовлетворяющее критерию Лихнеровича, за исключением двух пространств* (7.12), *удовлетворяет критерию Зельманова.*

Для пространств V_4 общего вида ($R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$) вопрос об общей связи критерия Зельманова с классификацией Петрова, а также с критерием Лихнеровича пока остается невыясненным. Однако уже сейчас можно утверждать, что существуют поля тяготения вида $R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие критерию Зельманова. В работах [102, 103] приводится ряд таких решений уравнений Эйнштейна с не равной нулю правой частью

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda \tau_{\alpha\beta}, \qquad (7.13)$$

интерпретируемой как тензор энергии — импульса изотропного электромагнитного поля.

Условие изотропности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, сформулированное в гл. 4, налагает жесткое ограничение на тензор энергии — импульса $\tau_{\alpha\beta}$, а следовательно, в силу уравнений поля (7.13), на тензор Риччи пространства — времени. Для того чтобы метрика $g_{\mu\nu}$ пространства — времени описывала поле тяготения с тензором энергии — импульса изотропного электромагнитного поля, необходимо и достаточно, чтобы отвечающий ей тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ удовлетворял следующей совокупности условий: алгебраическим условиям Райнича — Уилера [36]

$$R = 0, \quad R_{\alpha\rho}R^{\rho\beta} = \frac{1}{4}\,\delta_{\alpha}^{\beta}\,(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = 0 \tag{7.14}$$

и дифференциальным условиям Нордтведта — Пагельса [104]

$$\eta^{\alpha\mu\nu\sigma}\,(R_{\beta\nu;\,\sigma}\,R_{\mu\gamma} - R_{\beta\mu;\sigma}\,R_{\nu\gamma}) = 0. \tag{7.15}$$

В свою очередь, существование фронта электромагнитной волны в ряде случаев [103, 105] приводит к дополнительному свойству симметрии пространства — времени V_4, интерпретируемому в терминах групп движений данного V_4 (непрерывных групп преобразований координат, сохраняющих функциональный вид метрики, см., например, [58, 106]). А именно, метрики таких V_4 допускают r-параметрические группы движений G_r ($1 \leqslant r \leqslant 6$), оставляющие неизменными изотропные трехмерные гиперповерхности $^*V_3$, служащие поверхностями волнового фронта. Если любая точка некоторой поверхности в V_4 преобразованиями группы G_r может быть переведена в любую другую точку этой поверхности, то последняя называется поверхностью транзитивности группы G_r. Таким образом, изотропные поверхности транзитивности групп движений, действующих в таких полях тяготения, либо совпадают с фронтом электромагнитной волны, либо (при $r < 3$) принадлежат ему.

Приведем некоторые метрики, удовлетворяющие условиям (7.14) — (7.15), т. е. описывающие поля тяготения, порождаемые электромагнитным излучением, и, соответственно, допускающие группу движений G_r ($r \geqslant 3$), действующую транзитивно на изотропной гиперповерхности волнового фронта [103]:

1) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \alpha\,(x^0)\,dx^{2\,2} + 2\beta\,(x^0)\,dx^2dx^3 + \gamma\,(x^0)\,dx^{3\,2}, \tag{7.16}$$

допускает группы движений G_3, G_4 и G_5, действующие на изотропных трехмерных гиперповерхностях транзитивности $^*V_3$ (здесь $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$).

2) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} - 2x^3 dx^2 (dx^0 + dx^1) + \\ + \alpha (x^0 + x^1)(dx^{2\,2} + dx^{3\,2}), \qquad (7.17)$$

допускает группу движений G_4, действующую транзитивно на изотропной гиперповерхности $^*V_3$. Требование положительности плотности — давления электромагнитного излучения, $R_{00} < 0$, при лоренцевой сигнатуре в точке налагает на функцию α следующие условия:

$$\alpha < 0, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - 2\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} > -1 \quad (u = x^0 + x^1).$$

3) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = du\,dv - 2x^3 du\,dx^2 + \alpha(u)\,dx^{2\,2} + 2\beta(u)\,dx^2 dx^3 + \\ + \gamma(u)\,dx^{3\,2}, \qquad (7.18)$$

иными словами, пространство — время с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x^3 & 0 \\ 0 & -1 & -x^3 & 0 \\ -x^3 & -x^3 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \qquad (7.19)$$

допускает группу движений G_3, действующую на изотропной гиперповерхности транзитивности $^*V_3$. Требование $R_{00} < 0$ при лоренцевой сигнатуре приводит к следующим условиям на входящие в решение (7.19) функции:

$$\alpha < 0, \qquad m > 0,$$

$$2m \left[\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \gamma}{\partial u} - 1\right] - \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2 < 0,$$

где $m = \alpha\gamma - \beta^2$. Этим условиям, очевидно, без труда можно удовлетворить выбором подходящих функций α, β, γ.

Прямой проверкой легко убедиться, что метрики (7.16)—(7.19) удовлетворяют критерию Зельманова. Кроме того, как показано в работе [107], пространства V_4 с такими метриками допускают изотропное векторное поле $l^\alpha = \delta_1^\alpha$, удовлетворяющее уравнениям (6.10) — (6.11), т. е. описывают гравитационные волны и в смысле Лихнеровича.

Однако существуют решения уравнения тяготения (7.13) с $\tau_{\alpha\beta} \neq 0$, которые удовлетворяют критерию Лихнеровича, но не удовлетворяют критерию Зельманова. Примеры такого рода решений, полученных в работах [91, 107, 108], будут рассмотрены в гл. 10.

ГЛАВА 8
ДРУГИЕ КРИТЕРИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Критерий Дебеве

Подход Дебеве к вопросу о волновых свойствах гравитационных полей основывается на их связи в пустом пространстве — времени с изотропными векторными полями.

Как известно из работ Дебеве [66, 81, 109], Беля [80], Сакса [110] и др., в пустом V_4 тензору Римана можно сопоставить две изотропные двумерные гиперповерхности, в совокупности натянутые в каждой точке на четыре изотропных вектора: $l^{\alpha}_{(N)}$ $(N = 1, 2, 3, 4)$. Пользуясь каноническим видом матрицы тензора кривизны в бивекторном пространстве $\| R_{ab} \|$, можно показать, что в каждом пустом V_4 существует по меньшей мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля $l^{\alpha}_{(N)} \neq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$l_{[\lambda} R_{\alpha]\,\beta\gamma\,[\delta} l_{\sigma]} l^{\beta} l^{\gamma} = 0 \qquad (8.1)$$

(теорема Дебеве [66] в формулировке Сакса [110]).

Определим, следуя Дебеве, *тензор суперэнергии*

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{8}\rho\Big[(g_{\alpha\beta}p_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu}p_{\alpha\beta} + g_{\alpha\lambda}p_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}p_{\alpha\lambda} + $$
$$+ g_{\beta\lambda}p_{\alpha\mu} + g_{\alpha\mu}p_{\beta\lambda}) - \frac{96}{L} L_{\alpha\beta\lambda\mu}\Big], \qquad (8.2)$$

где ρ — произвольный не равный нулю скаляр и введен полностью симметричный тензор

$$L_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{24} \underset{(L,\,M,\,N,\,Q)}{\mathsf{P}} l^{L}_{\alpha}\, l^{M}_{\beta}\, l^{N}_{\lambda}\, l^{Q}_{\mu}, \qquad (8.3)$$

в котором P обозначает суммирование по всем перестанов-