удовлетворяющее уравнениям (6.10) — (6.11), т. е. описывают гравитационные волны и в смысле Лихнеровича.

Однако существуют решения уравнения тяготения (7.13) с $\tau_{\alpha\beta} \neq 0$, которые удовлетворяют критерию Лихнеровича, но не удовлетворяют критерию Зельманова. Примеры такого рода решений, полученных в работах [91, 107, 108], будут рассмотрены в гл. 10.

ГЛАВА 8

ДРУГИЕ КРИТЕРИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Критерий Дебеве

Подход Дебеве к вопросу о волновых свойствах гравитационных полей основывается на их связи в пустом пространстве — времени с изотропными векторными полями.

Как известно из работ Дебеве [66, 81, 109], Беля [80], Сакса [110] и др., в пустом V_4 тензору Римана можно сопоставить две изотропные двумерные гиперповерхности, в совокупности натянутые в каждой точке на четыре изотропных вектора: $l^{\alpha}_{(N)}$ $(N = 1, 2, 3, 4)$. Пользуясь каноническим видом матрицы тензора кривизны в бивекторном пространстве $\| R_{ab} \|$, можно показать, что в каждом пустом V_4 существует по меньшей мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля $l^{\alpha}_{(N)} \neq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$l_{[\lambda} R_{\alpha]\beta\gamma[\delta} l_{\sigma]} l^{\beta} l^{\gamma} = 0 \qquad (8.1)$$

(теорема Дебеве [66] в формулировке Сакса [110]).

Определим, следуя Дебеве, *тензор суперэнергии*

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{8}\rho \Big[(g_{\alpha\beta} p_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu} p_{\alpha\beta} + g_{\alpha\lambda} p_{\beta\mu} + g_{\beta\mu} p_{\alpha\lambda} + g_{\beta\lambda} p_{\alpha\mu} + g_{\alpha\mu} p_{\beta\lambda}) - \frac{96}{L} L_{\alpha\beta\lambda\mu} \Big], \qquad (8.2)$$

где ρ — произвольный не равный нулю скаляр и введен полностью симметричный тензор

$$L_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{24} \underset{(L, M, N, Q)}{\mathrm{P}} l^{L}_{\alpha} l^{M}_{\beta} l^{N}_{\lambda} l^{Q}_{\mu}, \qquad (8.3)$$

в котором P обозначает суммирование по всем перестановкам индексов. Кроме того, в (8.2) фигурируют величины

$$L = L^{\lambda}_{\lambda}, \qquad L_{\lambda\mu} = L^{\cdot\alpha\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\lambda\mu}, \qquad p_{\lambda\mu} = \frac{12}{L} L_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu},$$

причем предполагается, что $L \neq 0$.

Тензор Дебеве (8.2) в пустом пространстве — времени обладает следующими свойствами [81]: 1) он полностью симметричен; 2) всякая его свертка с метрическим тензором равна нулю:

$$g^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0; \tag{8.4}$$

3) тензор $V_{\alpha\beta\lambda\mu}$ является консервативным:

$$V^{\alpha}_{\beta\lambda\mu;\,\alpha} = 0; \tag{8.5}$$

4) тензор $V_{\alpha\beta\lambda\mu}$ удовлетворяет алгебраическому тождеству:

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} V^{\gamma\beta\lambda\mu} = \frac{9}{4} \rho^2 (1 - 3\sigma) \delta^{\gamma}_{\alpha}, \tag{8.6}$$

где

$$\sigma = 1 - 2 \frac{(l_{23})^2 (l_{14})^2 + (l_{13})^2 (l_{24})^2 + (l_{12})^2 (l_{34})^2}{(l_{23} l_{14} + l_{13} l_{24} + l_{12} l_{34})^2},$$

$$l_{(MN)} = g_{\alpha\beta} l^{\alpha}_{(M)} l^{\beta}_{(N)}.$$

Легко видеть, что по своим свойствам тензор Дебеве (8.2) обнаруживает глубокое сходство с тензором суперэнергии Беля (5.3). Переходя в канонический орторепер и задаваясь конкретным видом изотропных векторов l^{α}, можно показать, что с точностью до скалярного множителя оба тензора совпадают:

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} \cong T_{\alpha\beta\lambda\mu}.$$

Отсюда следует, что тензор Дебеве, как и тензор Беля, можно положить в основу определения «потока суперэнергии» гравитационного поля. Таким образом, *критерий Дебеве полностью эквивалентен первому критерию Беля.*

2. Гравитационные волны интегрируемого типа (критерии Хэли и Зунда — Левина)

В работах Хэли [111—117], а также Зунда и Левина [118—120] гравитационные волны определяются по Лихнеровичу, но при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на метрику пространства — времени. Хэли, осуществляя идею Лихнеровича [62], рассмотрел поля тяготения, удовлетворяющие критерию «гравитационных волн интегрируемого типа» [1]).

По определению, *пространство — время V_4 описывает гравитационные волны интегрируемого типа, если оно допускает векторное поле l^α, удовлетворяющее, кроме уравнений* (6.10) — (6.11) *и вытекающего из них условия изотропности l^α, также условию градиентности*

$$l_\alpha = \partial_\alpha l, \tag{8.7}$$

где l — некоторая скалярная функция координат.

Примером *свободных* гравитационных волн интегрируемого типа может служить поле тяготения, описываемое метрикой [113]:

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + 2q\chi l_\alpha l_\beta, \tag{8.8}$$

где $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$ — метрика плоского пространства — времени,

$$\begin{aligned} &l_\alpha = f_\alpha/\chi, \quad \chi = \frac{d\psi}{dl} + x^\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial l}, \\ &l^\alpha l_\alpha = 0, \quad l^\alpha_{;\,\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{8.9}$$

ψ и f_γ — пять произвольных функций аргумента l, q — скаляр.

Пример поля тяготения, отвечающего случаю *полного* гравитационного излучения интегрируемого типа, рассмотрен в работах [114, 115]. Соответствующая метрика записывается в виде

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + l_\alpha u_\beta + l_\beta u_\alpha, \tag{8.10}$$

где векторы u_α и l_α (8.7) удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнений (6.10) — (6.11).

Зунд и Левин [119] ввели определение «полного гравитационного излучения специального типа»: *пространство — время V_4 отвечает случаю полного гравитационного излучения специального типа, если данное V_4* 1) *является конформно плоским,* 2) *допускает ковариантно постоянное векторное поле l^α, удовлетворяющее условиям Лихнеровича*

[1]) В терминологии Хэли — Лихнеровича — «de type intégrable».

(6.10) — (6.11), *а также уравнениям*

$$l_\alpha = (\ln \tau)_{,\alpha}, \tag{8.11}$$

где τ — скаляр, определяемый вытекающей из уравнений (6.10) — (6.11) системой уравнений (6.15).

Этому определению удовлетворяет значительно более узкий класс полей тяготения, чем класс полей, описывающих полное гравитационное излучение интегрируемого типа по Лихнеровичу. Действительно, нетрудно показать, что метрики, описывающие полное гравитационное излучение специального типа, должны быть представимы в виде [119]

$$g_{\alpha\beta} = a^{-2}\varphi^2(\lambda)\overset{(00)}{g_{\alpha\beta}}, \tag{8.12}$$

$$\lambda = x^0 + x^1, \quad a^2 = \text{const} \neq 0,$$

где функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(\lambda) \neq (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma)^{-2},$$

а α, β и γ — числовые коэффициенты. При этом компоненты вектора l^α задаются в виде (8.11), скаляр τ имеет вид

$$\tau = 2\varphi^{-6}[2(\varphi')^2 - \varphi\varphi''] \neq \text{const}, \tag{8.13}$$

а штрих обозначает дифференцирование по λ.

Как отметили Зунд и Левин, не всякое поле тяготения, являющееся полем полного гравитационного излучения в смысле Лихнеровича и уравнений (6.10) — (6.11), удовлетворяет критерию Зельманова и уравнению (7.4). Однако всякое полное гравитационное излучение специального типа в смысле Зунда и Левина, как можно показать [119], автоматически удовлетворяет критерию Зельманова. Последнее обстоятельство представляет интерес для выяснения связи критериев Зельманова и Лихнеровича в случае непустого пространства — времени.

3. Критерий Малдыбаевой

Критерий гравитационных волн, предложенный Малдыбаевой [121], основан, как и критерий Зельманова, на общековариантном обобщении оператора Даламбера. Однако, в отличие от оператора (7.1), для описания гравитационных волн применяется оператор де Рама [42]

$$\Delta = d\delta + \delta d, \tag{8.14}$$

где d — оператор внешнего дифференцирования (см. [122]), а δ — оператор ко-дифференцирования (см. [42]), т. е. взятия дивергенции косых дифференциальных форм.

В силу своей структуры оператор (8.14) применим только к косым полилинейным дифференциальным формам. Рассмотрим, например, его применение к билинейной косой форме

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}, \tag{8.15}$$

где $F_{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в области, где нет источников, можно записать в виде двух групп уравнений [123]:

$$\mathrm{d}F = 0, \qquad \delta F = 0, \tag{8.16}$$

из которых вытекает, что 2-форма F удовлетворяет обобщенному волновому уравнению

$$\Delta F = 0. \tag{8.17}$$

Впервые уравнение (8.17) было получено Толмэном [63]. Заметим, что, в отличие от оператора (7.1), оператор (8.14) обладает рядом преимущественных топологических [42] и групповых [124] свойств. Идея применения этого оператора к исследованию гравитационных волновых полей принадлежит Лихнеровичу [43].

Для описания гравитационных волн в терминах тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ строится четырехмерная квадратная матрица $\| \Omega_{\alpha\beta} \|$, элементами которой являются билинейные косые формы вида

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} \tag{8.18}$$

(«2-форма кривизны» по терминологии Лихнеровича [125]).

Согласно определению Малдыбаевой, *пустое пространство — время с тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *определяет гравитационные волны, если соответствующая ему 2-форма кривизны* $\Omega_{\alpha\beta}$ *удовлетворяет обобщенному волновому уравнению*

$$\Delta\Omega_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.19}$$

где оператор Δ определяется формулой (8.14), а 2-форма $\Omega_{\alpha\beta}$ — формулой (8.18).

Выразив оператор Δ через ковариантные производные с помощью формулы де Рама [42], запишем уравнения (8.19) в тензорном виде:

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\rho\gamma\delta\tau} R_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot\rho\tau} = 0, \tag{8.20}$$

где оператор D определяется формулой (7.1).

Обобщая рассуждения на случай пространств Эйнштейна (3.7), получаем уравнения

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\rho\gamma\delta\tau} R_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot\rho\tau} - 2\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{8.21}$$

Используя тождество (7.8) и записывая уравнения (8.21) в каноническом орторепере, можно показать, что они удовлетворяются тогда и только тогда, когда тензор Римана принадлежит к вырожденному второму типу по Петрову (типу N диаграммы (3.20) при $\varkappa = 0$, см. [126]).

Итак, *критерию Малдыбаевой удовлетворяют пространства Эйнштейна вырожденного второго типа* T_2, *и только они*. Таким образом, в пространствах Эйнштейна критерии Зельманова и Малдыбаевой выделяют один и тот же класс полей тяготения; исключение составляют симметрические пространства (7.12) типа N, удовлетворяющие критерию Малдыбаевой, но не критерию Зельманова.

4. Критерий Мизры и Сингха

Критерий гравитационных волн, данный Мизрой и Сингхом [127, 128], опирается на понятие изотропного гравитационного поля, определяемое с помощью рассмотренных нами выше симметричных тензоров Матте (5.10) и (5.11). Как нетрудно убедиться, перейдя в систему координат, где $l_\alpha = \delta^0_\alpha$, ранг каждой из матриц $\| \mathscr{E}_{\alpha\lambda} \|$ и $\| \mathscr{H}_{\alpha\lambda} \|$ не превышает 3. Далее, тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$ ориентированы в пространстве:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{\alpha\lambda} u^\lambda &= 0, \\ \mathscr{H}_{\alpha\lambda} u^\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Таким образом, тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$ в известном смысле аналогичны трехмерным векторам E^i и H^i электрического и магнитного полей [82]. Благодаря этому удается построить определение изотропного гравитационного поля, опираясь на аналогию с изотропным электромагнитным полем (гл. 4).

Изотропное гравитационное поле в этом подходе характеризуется, во-первых, совпадением собственных значений матриц $\| \mathscr{E}_{\alpha\lambda} \|$ и $\| \mathscr{H}_{\alpha\lambda} \|$ (аналогия с совпадением модулей векторов электрического и магнитного полей), а во-вторых, — тем, что одно из собственных направлений является общим для обеих матриц (аналогия со взаимной ортогональностью трехмерных векторов E^i и H^i). Введя третье требование—равенство нулю собственных значений матриц $\| \mathscr{E}_{\alpha\lambda} \|$ и $\| \mathscr{H}_{\alpha\lambda} \|$, придем к критерию Мизры — Сингха: *пустое пространство — время* V_4, *обладающее тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\mu}$, *описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда тензоры* (5.10) *и* (5.11) *удовлетворяют соотношениям*

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda}\mathscr{E}^{\alpha\lambda} = \mathscr{H}_{\alpha\lambda}\mathscr{H}^{\alpha\lambda}, \tag{8.23}$$

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda}\mathscr{E}^{\lambda}_{\beta}\mathscr{E}^{\beta\gamma} = \mathscr{H}_{\alpha\lambda}\mathscr{H}^{\lambda}_{\beta}\mathscr{H}^{\beta\gamma} = 0. \tag{8.24}$$

В своем исследовании свойств полей тяготения в пустом пространстве, удовлетворяющих данному критерию, Мизра и Сингх доказывают две важные теоремы. Первая теорема утверждает, что пространство — время, удовлетворяющее этому критерию, допускает существование изотропного векторного поля l^α, для которого выполняются условия

$$R_{\alpha\beta\gamma[\delta}l_{\lambda]}l^\gamma = 0. \tag{8.25}$$

Но, согласно известному результату Дебеве [66] и Беля [80] (см. гл. 3, п. 4), пустое пространство — время V_4, определяемое условием (8.25), может принадлежать только к типам N или III диаграммы Пенроуза (3.20).

Вторая теорема утверждает следующее: для того чтобы пространство — время V_4 описывало гравитационные волны в смысле Мизры — Сингха, необходимо и достаточно, чтобы его тензор Римана удовлетворял уравнениям

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\gamma\delta\mu\nu}R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \tag{8.26}$$

Записывая эти уравнения в каноническом орторепере для канонического вида матрицы тензора Римана, вновь убеждаемся, что они всегда удовлетворяются для полей типов N и III диаграммы (3.20), и только для них.

Таким образом, *для того чтобы пустое пространство — время V_4 удовлетворяло критерию Мизры — Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типу N или III по Петрову. Следовательно, критерий Мизры — Сингха эквивалентен второму критерию Беля.*

Критерий Мизры — Сингха был обобщен его авторами [127] на случай непустых пространств — времен V_4 (поля полного гравитационного излучения). Чтобы осуществить такое обобщение, достаточно сформулировать определение изотропного гравитационного поля в терминах тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. гл. 3, п. 3). Действительно, аналогично тензорам Матте $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, введем симметричные тензоры

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda} = C_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu, \qquad \widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{C}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu.$$

Определяя изотропное гравитационное поле в общем случае на основе тензоров $\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda}$ и $\widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda}$ совершенно так же, как мы определили это понятие для пустого поля тяготения с помощью тензоров $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, т. е. уравнением

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\gamma\delta\mu\nu}C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$$

мы можем сформулировать следующую теорему: для того чтобы пространство — время V_4 удовлетворяло определению *полного* гравитационного излучения Мизры и Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типам N или III с точки зрения алгебраической структуры тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

ГЛАВА 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Гравитационная геометрическая оптика

До сих пор главным предметом нашего внимания были общековариантные формулировки понятий и критериев, составляющих основу подхода к исследованию волновых полей тяготения. Вопрос о распространении гравитационных волн, т. е. анализ определений фронта волны, траекторий распространения (лучей) и т. д., мы оставляли, по существу, в стороне.

Исходя из анализа задачи Коши для системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей в римановом