Таким образом, *для того чтобы пустое пространство — время V_4 удовлетворяло критерию Мизры — Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типу N или* III *по Петрову. Следовательно, критерий Мизры — Сингха эквивалентен второму критерию Беля.*

Критерий Мизры — Сингха был обобщен его авторами [127] на случай непустых пространств — времен V_4 (поля полного гравитационного излучения). Чтобы осуществить такое обобщение, достаточно сформулировать определение изотропного гравитационного поля в терминах тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. гл. 3, п. 3). Действительно, аналогично тензорам Матте $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, введем симметричные тензоры

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda} = C_{\alpha\beta\lambda\mu}u^{\beta}u^{\mu}, \qquad \widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{C}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^{\beta}u^{\mu}.$$

Определяя изотропное гравитационное поле в общем случае на основе тензоров $\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda}$ и $\widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda}$ совершенно так же, как мы определили это понятие для пустого поля тяготения с помощью тензоров $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, т. е. уравнением

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\gamma\delta\mu\nu}C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$$

мы можем сформулировать следующую теорему: для того чтобы пространство — время V_4 удовлетворяло определению *полного* гравитационного излучения Мизры и Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типам N или III с точки зрения алгебраической структуры тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

ГЛАВА 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Гравитационная геометрическая оптика

До сих пор главным предметом нашего внимания были общековариантные формулировки понятий и критериев, составляющих основу подхода к исследованию волновых полей тяготения. Вопрос о распространении гравитационных волн, т. е. анализ определений фронта волны, траекторий распространения (лучей) и т. д., мы оставляли, по существу, в стороне.

Исходя из анализа задачи Коши для системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей в римановом пространстве — времени V_4, мы убедились (гл. 2), что основные представления геометрической оптики являются общими для электромагнитного и гравитационного полей. Действительно, как и в теории электромагнитных волн в классической электродинамике Максвелла, закон распространения гравитационных волн определяется уравнением эйконала (2.22).

Решение этого основного уравнения — скалярная функция $\varphi(x^\sigma)$, *называемая* ***эйконалом***, *— определяет гиперповерхность фронта гравитационной волны* (2.15), а также траектории ее распространения, образующие конгруэнцию линий тока изотропного вектора l^α (2.25). Вектор l^α мы назовем *волновым вектором* гравитационной волны.

Очевидно, различным решениям уравнения эйконала должны отвечать различные типы фронта волны, которые, в свою очередь, определяют физически различные типы гравитационных волн. В связи с этим возникает задача общековариантной классификации типов гравитационных волн в зависимости от свойств фронта волны.

Хотя общепринятого окончательного решения этой задачи до сих пор не получено, тем не менее в ряде случаев удалось получить общековариантное описание типов гравитационных волн в зависимости от некоторых специфических свойств волнового фронта, определяемых заданием волнового вектора l^α. А именно, задаваясь в пространстве — времени V_4 изотропным векторным полем, которое обеспечивает существование решения уравнения эйконала, т. е. является градиентным, как в (2.25), можно классифицировать гравитационные волны в зависимости от свойств этого векторного поля. Задача облегчается тем, что решение вопроса о существовании изотропных векторных полей (в частности векторов Дебеве) в пространстве — времени V_4 во многих случаях помогает установить алгебраический тип самого пространства — времени V_4 по классификации Петрова.

На этом пути удалось выделить два типа гравитационных волн, называемых *плоскими* и *сферическими волнами*. Сами названия обусловлены геометрической аналогией с плоскими и сферическими электромагнитными волнами, базирующейся на сходстве законов геометрической оптики для гравитационных и электромагнитных полей. В дальнейшем мы будем широко пользоваться этой аналогией для физической интерпретации соответствующих типов гравитационных волн.

2. Сферические гравитационные волны. Примеры

По определению Робинсона и Траутмана [129—131], метрика пространства — времени V_4 описывает поле сферических гравитационных волн, если данное V_4 допускает изотропное векторное поле l^α, удовлетворяющее уравнениям

$$l_{[\alpha;\beta]} = 0, \tag{9.1}$$

$$l_{(\alpha;\beta)} l^{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(l^\alpha_{;\alpha})^2 = 0, \tag{9.2}$$

$$l^\alpha_{;\alpha} \neq 0. \tag{9.3}$$

Первое из этих условий означает [57], что векторное поле l^α является градиентным, т. е. может быть представлено в виде (2.25). Тогда, вследствие изотропности l^α, уравнение $\varphi(x^\alpha) = a$, где a — параметрическая константа, описывает семейство характеристических многообразий уравнений Эйнштейна, удовлетворяющих уравнению эйконала (2.22).

Как мы видели выше (гл. 2), траектории векторного поля l^α, удовлетворяющего уравнениям (2.22), (2.25), образуют семейство бихарактеристик уравнений Эйнштейна и, следовательно, являются изотропными геодезическими в пространстве—времени V_4 с метрикой $g_{\alpha\beta}$. Тогда условие (9.2) с физической точки зрения означает отсутствие искажения формы тени, отбрасываемой на экран непрозрачным предметом, освещаемым лучами света, движущимися по траекториям вектора l^α [131—134]. В свою очередь, условие (9.3) означает увеличение или уменьшение тени по сравнению с самим предметом (в отличие от случая плоских электромагнитных волн, для которых всегда $l^\alpha_{;\alpha} = 0$ [135]).

Действительно, пусть данная конгруэнция изотропных геодезических с касательным вектором l^α определяет траектории распространения света. Рассмотрим малый непрозрачный предмет, освещаемый лучами света и отбрасывающий тень на экран, расположенный ортогонально лучам. Можно показать [110], что при этом все части тени достигают экрана одновременно. Сместим теперь предмет путем параллельного переноса вдоль лучей в положение, занимаемое экраном, и сравним его размеры с размерами тени. Если экран находится на расстоянии dr от предмета, то его тень подвергается повороту на величину $\omega\, dr$, сдвигу на величину $|\sigma|\, dr$ и растяжению или сжатию на величину $\varepsilon\, dr$, причем скаляры ε, ω и σ имеют вид [71, 136]

$$\varepsilon = \frac{1}{2} l^{\alpha}_{;\alpha}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{2} l_{[\alpha;\beta]} l^{\alpha;\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2} l_{(\alpha;\beta)} l^{\alpha;\beta} - \varepsilon^2.$$

Интерпретация «оптических скаляров» ε, ω и σ построена на основе следующей гидродинамической аналогии. Пусть u^{α} — поле временноподобного единичного вектора, которым мы зададим 4-скорость идеальной жидкости. Тогда кинематика бесконечно малого элемента объема жидкости описывается величинами, образующими следующее разложение ковариантной производной 4-скорости:

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \tilde{\varepsilon} \eta_{\alpha\beta} - a_{\alpha} u_{\beta}.$$

Здесь

$$\eta_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta},$$

$a_{\alpha} = u_{\alpha;\beta} u^{\beta}$ — так называемый «вектор 4-ускорения» (равный нулю для геодезической конгруэнции), $\tilde{\varepsilon} = u^{\sigma}{}_{;\sigma}$, а тензоры

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta^{\sigma}_{[\alpha} \eta^{\tau}_{\beta]} u_{\sigma;\tau}, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \eta^{\sigma}_{(\alpha} \eta^{\tau}_{\beta)} u_{\sigma;\tau}$$

представляют собой соответственно тензор угловой скорости вращения и тензор скоростей деформаций рассматриваемого элемента объема относительно геодезической системы координат (системы Ферми), заданной вдоль траекторий вектора u^{α}. Скаляры вращения $\tilde{\omega}$ и сдвига (дисторсии) $\tilde{\sigma}$ траекторий u^{α} определяются через тензоры $\omega_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}.$$

Как показал Кундт [137], условие $\omega = 0$ для изотропной геодезической конгруэнции не только необходимо, но и достаточно для выполнения условия (9.1), т. е. задание изотропной конгруэнции геодезических без вращения эквивалентно заданию поверхности волнового фронта.

Робинсон и Траутман [130] получили класс точных решений уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, описывающих сферические гравитационные волны и охватывающих, как показали Фостер и Ньюмэн [138], все *алгебраически специальные* поля тяготения, т. е. поля типов D, II, N и III по Петрову. Этот класс решений представляется метрикой

$$ds^2 = 2dx^0\,dx^1 + \left(K - 2Hx^1 - \frac{2M}{x^1}\right)dx^{02} - \\ - x^{12}P^{-2}\{[dx^2 + Q_{,3}\,dx^0]^2 + [dx^3 + Q_{,3}\,dx^0]^2\}, \qquad (9.4)$$

$$M = M(x^0),\ P = P\,(x^0,\ x^2,\ x^3),\ Q = Q\,(x^0,\ x^2,\ x^3),$$

где функции H и K определяются формулами

$$H = P^{-1}P_{,0} + P\,(P^{-1}Q)_{,23} - PQ\,(P^{-1})_{,23},$$
$$K = P\,(P_{,22} + P_{,33}) - (P_{,2})^2 - (P_{,3})^2.$$

В этой же системе координат фронт гравитационной волны выражается уравнением $x^0 = \mathrm{const}$, а ортогональный к нему изотропный вектор l^α имеет вид $l^\alpha = \delta^\alpha_1$, так что траектории распространения гравитационной волны (гравитационные лучи) совпадают с координатными линиями x^1.

Уравнения поля (2.2) относительно метрики (9.4) сводятся к двум соотношениям:

$$Q_{,22} - Q_{,33} = 0,$$
$$K_{,22} - K_{,33} = 4P^{-2}\,(M_{,0} - 3HM). \qquad (9.5)$$

Первое из них позволяет преобразованием координат (сохраняющим вид метрики) обратить в нуль функцию Q, так что в новой системе координат уравнения поля сводятся к единственному (второму) соотношению (9.5).

Исследуя метрику Робинсона — Траутмана (9.4) в системе координат, где $Q = 0$, Бартрум [135] показал, что она допускает обобщение на случай непустого пространства — времени, а именно, на случай, когда в пространстве имеется электромагнитное поле. При этом можно доказать, что электромагнитное поле является изотропным, т. е. оба инварианта (4.2) тензора Максвелла $F_{\mu\nu}$ обращаются в нуль.

Из компонент $T_{\mu\nu}$ для метрики Робинсона — Траутмана отличной от нуля оказывается лишь одна:

$$T_{00} = E^2/\rho^2,$$

где

$$\lambda E^2 = \frac{1}{2}\,P^2\,(K_{,22} - K_{,33}) - 2M_{,0} + (QM/P)\,P_{,0}.$$

Бартрум, используя доказанную им ранее теорему [139] о дифференциальных свойствах волнового вектора

l^α, получил частное решение, описывающее самосогласованную систему сферических гравитационных и электромагнитных волн, распространяющихся вдоль общих траекторий — линий векторного поля l^α:

$$ds^2 = (2 - A)\,dr^2 + Br^2\,(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\theta^2) - \\ - 2\,(1 - A)\,dr\,dt - A\,dt^2, \quad (9.6)$$

где

$$A = \left(\frac{M}{m}\right)^{2/3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2n} - \frac{2r}{3m}M_{,0} - \frac{2M}{r},$$
$$B = \left(\frac{M}{m}\right)^{-2/3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{-2n}, \quad m = \text{const}, \quad M = M(x^0), \quad (9.7)$$

n — целое число, а сферические координаты r, φ, θ, t связаны с «декартовыми» координатами, в которых Q уже устранена, обычным преобразованием. Замечательно, что в пустом пространстве при $m = m_0$ метрика (9.6) — (9.7) переходит в метрику Шварцшильда.

Примером поля тяготения, допускающего интерпретацию на языке сферических гравитационных волн, может служить также решение Керра — Шилда [140, 141] в пустом пространстве — времени:

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu. \quad (9.8)$$

Здесь l_μ — изотропное векторное поле: $g_{\mu\nu}\,l^\mu l^\nu = 0$, откуда вытекает также условие $\overset{(00)}{g}_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = 0$, и обратно, а функция $H(x^\alpha)$ вместе с вектором l^α удовлетворяет уравнениям поля

$$a_{(\alpha}l_{\beta)} + (\dot{H} + 2H\varepsilon)\,l_{(\alpha;\,\beta)} - Hg^{\sigma\rho}l_{\alpha;\,\rho}l_{\beta;\,\sigma} + \frac{1}{2}\,bl_\alpha l_\beta = 0, \quad (9.9)$$

где введены обозначения:

$$a_\alpha = (\dot{H} + 2H\varepsilon)_{,\alpha} - 2H_{,\rho}l_{\alpha;}^{\rho} - Hl_{\alpha;}{}^{\rho}{}_{\rho},$$
$$b = 2H\ddot{H} - g^{\alpha\beta}H_{;\,\alpha\beta}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\,l^\alpha_{;\alpha}, \quad \dot{H} = l^\alpha H_{,\alpha}.$$

Из уравнений поля (9.9) следует [141], что вектор l^α касателен к конгруэнции геодезических с нулевой дисторсией: $\sigma = 0$. Предположив, кроме того, что эта конгруэнция обладает равным нулю вращением, т. е. потребовав, чтобы вектор l^α был нормальным: $l_{[\alpha;\,\beta]} = 0$, мы получаем пустое поле тяготения с гравитационными волнами, распространяющимися вдоль конгруэнции l^α.

Для того чтобы это поле тяготения отвечало сферическим гравитационным волнам (т. е. чтобы удовлетворялось условие $\varepsilon \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типам II или D по Петрову (Мас [142]). Если это условие имеет место, то метрика (9.8) принимает вид

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2\varepsilon l_\mu l_\nu.$$

Напротив, в случае $\varepsilon = 0$ соответствующее поле тяготения принадлежит к типу N или III. Это следует из результата Керра и Шилда, показавших [141], что для метрики (9.8) выполняется соотношение

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^\alpha l^\delta = \ddot{H} l_\beta l_\gamma.$$

Более того, из условия $\varepsilon = 0$ вытекает, что $\ddot{H} = 0$, и следовательно, в этом случае метрика (9.8) удовлетворяет критерию Беля (5.20). В этом последнем случае, как мы увидим ниже, метрика Керра — Шилда описывает плоские гравитационные волны.

3. Плоские гравитационные волны. Определение Кундта

Общековариантное определение плоских гравитационных волн было введено двумя различными способами Бонди — Пирани — Робинсоном [143], Пенроузом [144] и Кундтом [137, 145—147].

Согласно определению Кундта, *метрика пространства — времени V_4 описывает поле плоских (или «плоскофронтовых») гравитационных волн, если данное V_4 допускает изотропное векторное поле l^α, удовлетворяющее уравнениям* (9.1) — (9.2) *и условию*

$$l^\alpha_{;\alpha} = 0. \qquad (9.10)$$

Как мы уже знаем, эти требования ведут к тому, что траектории вектора l^α оказываются изотропными геодезическими. При этом первое требование, выражаемое уравнением (9.1) (условие существования фронта волны), означает, что форма тени, отбрасываемой предметом на экран, расположенный ортогонально лучам (траекториям l^α), не деформирована так, как если бы предмет подвергся повороту относительно своего истинного положения; второе, выраженное уравнением (9.2),—что она не деформирована так, как если бы предмет претерпел сдвиг, и, наконец, третье, т. е. условие (9.10),—что тень не увеличена и не уменьшена в размерах по сравнению с самим предметом (см. [71, 131, 148]).

Таким образом, Кундт в своем определении учел основные свойства, с которыми мы знакомы по опыту исследования плоских электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского, где фронт плоской волны параллельно смещается вдоль ортогональных к нему траекторий распространения света, не подвергаясь никаким искажениям.

Шевретон [149] показал, что *удовлетворяющее определению Кундта поле плоских гравитационных волн в пустом пространстве V_4 может принадлежать только к типу O* (*тривиальный случай*, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$), *к типу N или к типу* III *по Петрову*. Если оно принадлежит к типу N, то вектор l^α является ковариантно постоянным: $l^\alpha{}_{;\beta} = 0$.

Все пустые пространства V_4 типа N, допускающие ковариантно постоянное векторное поле l^α, известны [105, 150] и образуют класс решений уравнений Эйнштейна, определенных с точностью до интегрирования некоторой системы дифференциальных уравнений. На исследовании плосковолновых решений этого типа мы подробно остановимся в следующей главе.

Кундт же получил и другой класс решений уравнений поля в пустом пространстве [137], соответствующих плоским волнам в смысле введенного им определения. Среди решений этого класса есть как поля типа N, так и поля типа III по Петрову.

Метрика Кундта получена в изотропной тетраде, т. е. изотропном квазиорторепере $\{t^\alpha, \bar{t}^\alpha, l^\alpha, m^\alpha\}$, векторы l^α и m^α которого вещественны, а векторы t^α и $\bar{t}^\alpha$ комплексно сопряжены, причем $l^\alpha m_\alpha = \bar{t}^\alpha t_\alpha = 1$:

$$ds^2 = |dz + B du|^2 + 2\,dv\,du + H\,du^2, \qquad (9.11)$$

где $z = x + iy$, а B и H — вещественные функции координат причем

$$B_{,v} = 0,\ B_{,xx} + B_{,yy} = 0,\quad H = -vB_{,x} + A,\quad A_{,v} = 0, \qquad (9.12)$$
$$A_{,xx} + A_{,yy} + 2BB_{,xx} + 3B_{,x}B_{,x} - 2B_{,xu} + B_{,y}B_{,y} = 2\tau.$$

Здесь линии u временноподобны, а скаляр τ определяется уравнениями (6.15). В пустоте $\tau = 0$, откуда, ввиду изотропности l_α, следует, что для непустого пространства — времени метрика (9.11) отвечает случаю электромагнитного излучения. Общие траектории распространения электромагнитных и гравитационных волн (линии тока изотропного векторного поля l^α) совпадают с координатными линиями v; иными словами, при выборе координаты v в качестве аффинного параметра на конгруэнции изотропных геодезических, последние выражаются уравнениями

$$\frac{dx^\alpha}{dv} = l^\alpha, \tag{9.13}$$

а фронт волны определяется гиперповерхностью $u = \mathrm{const}$.

Метрика Кундта (9.11) является частным случаем класса метрик, полученных им в работе [137]. Этот класс по Кундту описывает плоскофронтовые гравитационные волны, отвечающие более общим условиям, когда вектор l^α — не обязательно нормальный, т. е. не ограничен требованием $l_{[\alpha;\beta]} = 0$.

В случае $\tau = 0$ (пустое пространство — время) принадлежность метрики Кундта к типу N по классификации Петрова определяется условием $B = 0$. Согласно приведенной выше теореме Шевретона, при $B = 0$ метрика Кундта описывает пространство — время, допускающее ковариантно постоянное векторное поле l^α. На исследовании таких пространств V_4 мы подробно остановимся в следующей гл. 10.

4. Плоские гравитационные волны. Определение Бонди — Пирани — Робинсона

Как показали Гольдберг и Керр [151, 152], асимптотическое поведение гравитационных полей, создаваемых изолированными источниками, обнаруживает большое сходство с поведением плоских электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского.

Этот результат можно рассматривать как мотивировку предпринятой Бонди, Пирани и Робинсоном [143] попытки дать строго групповое определение понятия плоских гравитационных волн в пустом пространстве как метрического поля, удовлетворяющего двум постулатам: 1) поле одинаково в любой точке волнового фронта, 2) метрический тензор пространства — времени, подобно вектор-потенциалу плоских электромагнитных волн, допускает определенную группу симметрии. Такой группой является группа движений G_5, которая оставляет неизменной изотропную гиперповерхность в V_4. Уравнение этой гиперповерхности (описывающее фронт волны) в некоторой системе координат имеет вид

$$x^1 - x^0 = \text{const}. \tag{9.14}$$

Петров [57] показал, что существует только одно пространство V_4 сигнатуры 2, допускающее группу движений G_5, действующую транзитивно на изотропной трехмерной гиперповерхности. В системе координат, отвечающей (9.14), его интервал записывается в виде

$$ds^2 = -A\,dx^{1\,2} - 2D\,dx^1 dx^2 - B\,dx^{2\,2} - C\,dx^{3\,2} + C\,dx^{0\,2}, \tag{9.15}$$

где A, B, C и D — функции запаздывающего аргумента $x^1 - x^0$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$M'' - \frac{1}{2} M' (\ln M)' - M' (\ln C)' - A'B' - (D')^2 = 0,$$

в котором $M = AB - D^2 > 0$, а штрих означает дифференцирование по $x^1 - x^0$.

Иохари [154], опираясь на результаты Такено [153], обобщил определение Бонди — Пирани — Робинсона на случай непустых пространств V_4, удовлетворяющих уравнениям (7.13). Хэли [112] и Иохари [154] рассмотрели понятие плоскополяризованной гравитационной волны и определили параметры поляризации. (Ранее такого рода вопросы обсуждал Розен [155], а также Бордман и Бергман [156].) В этой же связи представляет самостоятельный интерес работа Аве [157], где предложено определение монохроматической гравитационной волны. На этой работе нам предстоит остановиться подробнее.

5. Монохроматические гравитационные волны. Определение Аве

Следуя общей электромагнитной аналогии, Аве [157] называет гравитационную волну *монохроматической, если соответствующий волновой вектор* (2.25) *является гармоническим, т. е. удовлетворяет уравнению*

$$(\sqrt{-g}\, l^\alpha)_{,\alpha} = (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta})_{,\alpha} = 0. \tag{9.16}$$

В этом случае гармонической является также комплексная функция $U = \exp(i\varphi)$:

$$(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} U_{,\beta})_{,\alpha} = 0, \tag{9.17}$$

причем этот факт инвариантен относительно замен $\varphi \to f(\varphi)$, где f — любая функция класса C^2. Благодаря этому Аве мог исследовать монохроматическую гравитационную волну как поле простой периодической функции $U(x^\alpha)$.

Пусть волновой вектор l^α удовлетворяет условию (9.1) и, кроме того, отвечающая ему изотропная геодезическая конгруэнция обладает равным нулю растяжением:

$$l^\alpha_{;\alpha} = 0. \tag{9.18}$$

Тогда, очевидно, он удовлетворяет уравнению (9.16) и является гармоническим; а соответствующая плоская гравитационная волна (в смысле Кундта) будет монохроматической.

Аве наиболее полно исследовал вопрос о типах пространств V_4, допускающих интерпретацию на языке монохроматических гравитационных волн. Он исходил из уравнений Эйнштейна (1.1), использовав справа (в качестве $T_{\alpha\beta}$) тензор энергии — импульса системы идеальная жидкость плюс электромагнитное поле:

$$T_{\alpha\beta} = X\left[(\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} - F_{\alpha\rho} F_{\beta\cdot}^{\cdot\rho}\right] - \frac{1}{2}\Theta g_{\alpha\beta}. \tag{9.19}$$

Здесь ρ, p и u_α — плотность, давление и 4-скорость, X и Θ — константы, определяющие произвол в выборе тензора энергии — импульса.

Решение задачи дается следующей теоремой Аве: поля тяготения, определяемые тензором энергии — импульса (9.19), допускают монохроматические гравитационные волны только в том случае, если

1) $\rho = p = 0$ (т. е. источником является только электромагнитное поле);

2) фронт гравитационной волны $\varphi(x^\alpha)$ определяется условием

$$l_{\beta;\alpha} = l_\alpha \varepsilon_\beta + l_\beta \varepsilon_\alpha, \tag{9.20}$$

где ε_α — некоторый вектор, ортогональный l_α;

3) волновой вектор l^α является собственным вектором тензора $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\rho} l^\alpha = \lambda \cdot l_\rho. \tag{9.21}$$

Замечая, что при этих условиях

$$l^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha})\, l_\gamma + l_\beta \mu_{\alpha\gamma} - l_\alpha \mu_{\beta\gamma},$$
$$\mu_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta;\alpha} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$$

и вычисляя по Дебеве величины

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta l^\delta, \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta l^\delta,$$

убеждаемся, что в случае пустого пространства — времени ($T_{\alpha\beta} = 0$) они обращаются в нуль, т. е. удовлетворяют уравнениям (5.20). Это, согласно второму критерию Беля, означает, что данное поле тяготения принадлежит к типу N или III по Петрову. Таким образом, *пустое пространство — время описывает монохроматические гравитационные волны только в том случае, если оно принадлежит к типу N или* III *по Петрову.*

Для получения точных решений уравнений Эйнштейна, описывающих монохроматические гравитационные волны, удобно воспользоваться такой координатной системой, в которой компоненты метрического тензора явно выражаются через гармоническую функцию

$$U(x^\alpha) = \exp(i\varphi). \tag{9.22}$$

В этом случае $g_{\mu\nu}$, рассматриваемые как потенциалы гравитационного поля, обнаруживают полную аналогию с вектор-потенциалом плоской монохроматической электромагнитной волны [151]:

$$A^\alpha = \boldsymbol{a}^\alpha \exp i\,(\boldsymbol{kr} - \omega t).$$

Пусть, например, решение ищется в виде

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g_{\mu\nu}} + 2a_{\mu\nu} U(x^\alpha), \tag{9.23}$$

где $a_{\mu\nu}$ — постоянный симметричный тензор (аналог амплитуды периодических колебаний). Выберем в качестве «тензора амплитуд» $a_{\mu\nu}$ тензор

$$a_{\mu\nu} = l_\mu \varepsilon_\nu + l_\nu \varepsilon_\mu, \tag{9.24}$$

где l_μ — постоянный изотропный вектор и ε_μ — ортогональный к нему постоянный вектор [1]). Пусть далее эйконал φ в выбранной системе координат имеет вид

$$\varphi = l_\alpha x^\alpha = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} l^\alpha x^\beta, \tag{9.25}$$

так что

$$U(x^\alpha) = A_0 \cos(l_\alpha x^\alpha) + B_0 \sin(l_\alpha x^\alpha) \ (A_0, B_0 = \mathrm{const}). \tag{9.26}$$

Подстановкой в уравнения (2.2) теперь можно убедиться [159], что в принятых предположениях метрика (9.23) — (9.26) описывает пустое V_4, отвечающее плоским монохроматическим гравитационным волнам. Аналогия между таким полем тяготения и полем плоских монохроматических электромагнитных волн оказывается еще более наглядной, если метрику (9.23) — (9.26) представить в эквивалентной форме [159]:

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2\sigma_{\mu\nu}, \tag{9.27}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp[i l_\alpha x^\alpha] + \overset{*}{a}_{\mu\nu} \exp[-i l_\alpha x^\alpha], \tag{9.28}$$

$$a_{\mu\nu}, \overset{*}{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(l_\mu \varepsilon_\nu + l_\nu \varepsilon_\mu)(A_0 \mp i B_0). \tag{9.29}$$

Известная метрика Переса [160]

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} - dx^{2\,2} - dx^{3\,2} - 2f(dx^0 + dx^3)^2 \tag{9.30}$$

также принадлежит к классу метрик (9.23), если положить

$$\tilde{x}^3 = z = f(x^1, x^2, u), \quad \tilde{x}^0 = u = x^0 + x^3,$$
$$a_{33} = a_{00} = a_{03} = -1$$

(остальные компоненты $a_{\mu\nu}$ равны нулю). При этом уравнения поля (2.2) сводятся к единственному условию гармоничности функции f по аргументам x^1 и x^2:

$$f_{,11} + f_{,22} = 0. \tag{9.31}$$

---

[1]) В системе координат, где метрика $g_{\mu\nu}$ имеет вид (9.23), соотношения, выражающие ковариантное постоянство и ортогональность векторов, приобретают простой вид обычных соотношений постоянства и ортогональности относительно галилеевой метрики.