ГЛАВА 10

ПЛОСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

1. Плоские волны в пустом пространстве — времени

Как мы уже знаем из гл. 9, траектории распространения (лучи) плоской гравитационной волны в смысле Кундта для полей типа N в пустом пространстве определяются абсолютно параллельным, или, иными словами, ковариантно постоянным, изотропным векторным полем l^α.

Можно доказать и обратное [105]: всякое пустое пространство — время, допускающее абсолютно параллельное векторное поле l^α, принадлежит к типу N по Петрову, причем вектор l^α является изотропным и единственным. Это вытекает из условий интегрируемости уравнений $l^\alpha_{;\beta} = 0$, имеющих вид (6.11), и результата Дебеве (3.29).

Таким образом, абсолютно параллельное векторное поле в пустом пространстве определяет конгруэнцию изотропных геодезических, представляющих собой траектории распространения плоских гравитационных волн по Кундту.

Как показал Эйзенхарт [161] (см. также Кручкович — Солодовников [162]), метрический тензор пространства V_4, допускающего единственное изотропное абсолютно параллельное векторное поле l^α, представим в виде

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & 1 & Q & F \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & A & D \\ F & 0 & D & B \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

где A, B, D, E, F, Q — функции координат x^0, x^2, x^3, причем в той же системе координат вектор l^α имеет вид $^\alpha = \delta^\alpha_1$.

Для метрики (10.1) из двадцати существенных компонент тензора Римана отличны от нуля только шесть: R_{3230}, R_{3202}, R_{0202}, R_{3232}, R_{0303}, R_{0203}. Из десяти уравнений поля (2.2) шесть удовлетворяются тождественно, а из остальных четырех — три уравнения принимают вид

$$R_{3232} = R_{3230} = R_{3202} = 0, \tag{10.2}$$

где

$$R_{3223}=D_{,23}-\frac{1}{2}(A_{,33}+B_{,22})-\frac{1}{4}\{A_{,3}(A_{,3}B-B_{,2}D)+$$
$$+B_{,2}(B_{,2}A-A_{,3}D)+B_{,3}[A_{,2}D-A(2D_{,2}-A_{,3})]-$$
$$-(2D_{,3}-B_{,2})[A_{,2}B-D(2D_{,2}-A_{,3})]\},$$

$$R_{3220}=\frac{1}{2}(D_{,02}-A_{,03}+Q_{,23}-F_{,22})+\frac{1}{4g}(D_{,0}+F_{,2}-Q_{,3})\times$$
$$\times(A_{,3}D-AB_{,2})+A_{,0}(A_{,3}B-B_{,2}D)+(B_{,3}+D_{,0}-F_{,2})\times$$
$$\times[D(2D_{,2}-A_{,3})-A_{,2}B]+B_{,0}[A_{,2}D+A(A_{,3}-2D_{,2})],$$

$$R_{3230}=\frac{1}{2}(B_{,02}-D_{,03}-Q_{,33}-F_{,23})+$$
$$+\frac{1}{4g}\{(D_{,0}+Q_{,3}-F_{,2})(A_{,3}B-B_{,2}D)+B_{,0}(AB_{,2}-A_{,3}D)+$$
$$+(D_{,0}+F_{,2}-Q_{,3})[D(B_{,2}-2D_{,3})-AB_{,3}]+$$
$$+A_{,0}[B(2D_{,3}-B_{,2})-B_{,3}D]\},$$
$$g=\det\|g_{\alpha\beta}\|=AB-D^2<0.$$

Последнее уравнение поля связывает оставшиеся компоненты тензора Римана:

$$AR_{0330}+BR_{0220}-2DR_{0230}=0, \qquad (10.3)$$

где

$$R_{0220}=Q_{,02}-\frac{1}{2}(A_{,00}+E_{,22})+\frac{1}{4g}\{(D_{,0}-F_{,2}-Q_{,3})\times$$
$$\times[2A_{,0}D+A(Q_{,3}-F_{,2}-D_{,0})]-(A_{,0})^2B+(E_{,3}-2F_{,0})\times$$
$$\times[A_{,2}D+A(A_{,3}-2D_{,2})]+(E_{,2}-2Q_{,2})\times$$
$$\times[B_{,3}D+B(B_{,2}-2D_{,3})]\},$$

$$R_{0330}=F_{,03}-\frac{1}{2}(B_{,00}+E_{,33})+\frac{1}{4g}\{(D_{,0}+Q_{,3}-F_{,3})\times$$
$$\times[2B_{,0}D+B(Q_{,3}+F_{,2}-D_{,0})]-$$
$$-A(B_{,0})^2+(2F_{,0}-E_{,3})[AB_{,3}+D(B_{,2}-2D_{,3})]+$$
$$+(E_{,2}-2Q_{,0})[B_{,3}D+B(B_{,2}-2D_{,3})]\},$$

$$R_{0230}=\frac{1}{2}(F_{,02}+Q_{,03}-E_{,23}-D_{,00})-$$
$$-\frac{1}{4g}\{(D_{,0}+B_{,3}-F_{,2})[BA_{,0}-D(D_{,0}+F_{,2}-Q_{,3})]+$$
$$+B_{,0}[A(D_{,0}+F_{,2}-Q_{,3})-DA_{,0}]+(2Q_{,0}-E_{,2})\times$$
$$\times(DB_{,2}-BA_{,3})+(2F_{,0}-E_{,3})(DA_{,3}-AB_{,2})\}.$$

Таким образом, общая метрика (10.1), удовлетворяющая четырем уравнениям поля (10.2) — (10.3), определяет класс точных решений уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, удовлетворяющих волновым критериям Лихнеровича и Зельманова, а также определению плоских гравитационных волн Кундта. Можно показать, что этот класс включает в себя ряд известных решений уравнений Эйнштейна, принадлежащих к вырожденному типу II по Петрову, в частности решения Такено [153, 163], Переса [160] — (9.30), Петрова [57] — (9.15) и др.

Так, метрика Переса (9.30) простым преобразованием координат (поворотом осей в плоскости (x^0, x^3)) приводится [164] к виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+f(x^0, x^2, x^3) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (10.4)$$

Очевидно, метрика (10.4) есть частный случай метрики (10.1) при

$$A = B = -1, \qquad D = Q = F = 0,$$
$$E = 1 + f(x^0, x^2, x^3).$$

При этом уравнения поля (10.2) удовлетворяются тождественно, а уравнение (10.3) приводится к условию гармоничности функции f по аргументам x^2 и x^3:

$$f_{,22} + f_{,33} = 0.$$

Метрика Такено [153]

$$ds^2 = -A\,dx^{1\,2} - 2D\,dx^1 dx^2 - B\,dx^{2\,2} - (P - S)\,dx^{3\,2} - \\ - 2S\,dx^3 dx^0 + (P + S)\,dx^{0\,2}, \qquad (10.5)$$

где A, B, D, P, S — функции аргумента $x^3 - x^0$, а квадратичная форма

$$dl^2 = A\,dx^{1\,2} + 2D\,dx^1 dx^2 + B\,dx^{2\,2},$$

положительно определенная, является решением уравнений (2.2), если

$$M_{,33} - (M_{,3})^2/2M - A_{,3}B_{,3}/(D_{,3})^2 = 0, \quad M \equiv AB - D^2.$$

Можно показать [165], что данную метрику, как и метрику Петрова (9.15), можно преобразованием координат и их тривиальной перенумерацией привести к виду

$$ds^2 = 2\,dx^0dx^1 + A\,(x^0)\,{dx^2}^2 + 2D\,(x^0)\,dx^2dx^3 + \\ + B\,(x^0)\,{dx^3}^2,$$

откуда вытекает, что она представляет собой частный случай метрики (10.1), если в последней выбрать $E = Q = F = 0$, а функции A, B, D считать зависящими только от x^0.

Наконец, частным же случаем (10.1) является и другое решение Петрова [65], представленное метрикой

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -x^3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & A\,(x^0) & D\,(x^0) \\ 0 & 0 & D\,(x^0) & B\,(x^0) \end{pmatrix}, \tag{10.6}$$

для которой $AB - D^2 < 0$, $A, B \neq 0$, а из уравнений поля (2.2) единственным нетривиальным остается уравнение (10.3).

Естественно предположить, что произвол, с которым определен метрический тензор (10.1) пространств Эйнштейна, допускающих абсолютно параллельное векторное поле, в какой-то мере фиктивен, т. е. обусловлен выбором системы координат; в таком случае должны существовать допустимые преобразования [1]) координат

$$\begin{aligned} x^0 &= \tilde{x}^0, \\ x^1 &= \tilde{x}^1 + \chi\,(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \\ x^2 &= \varphi\,(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \\ x^3 &= \psi\,(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \end{aligned} \tag{10.7}$$

сохраняющие **вид** метрики $g_{\mu\nu}$ (10.1) и векторного поля l^α $(= \delta^\alpha_1)$, которые позволяют упростить метрику (10.1) и, в частности, устранить некоторые из входящих в нее функций. Кроме того, само решение уравнений поля (2.2) определено формой (10.1) лишь с точностью до интегрирова-

---

[1]) Допустимыми мы называем преобразования, якобиан которых не обращается в нуль. Соответственно, произвольность функций χ, φ и ψ в (10.7) ограничена лишь этим дифференциальным условием: $J = \varphi_{,2}\psi_{,3} - \psi_{,2}\varphi_{,3} \neq 0$.

ния четырех уравнений в частных производных второго порядка, что также значительно уменьшает число независимых произвольных функций, которые могут появиться в метрике (10.1). В этой связи целесообразно также попытаться проинтегрировать хотя бы некоторые из уравнений (10.2) — (10.3).

Обе задачи недавно были решены Кайгородовым и Пестовым [166, 167], которые показали, что в новой системе координат ($\tilde{x}^\alpha$) компонентам $\tilde{g}_{23}$, $\tilde{g}_{03}$ и $\tilde{g}_{33}$ можно придать значения

$$\tilde{g}_{23} = 0, \quad \tilde{g}_{03} = 0, \quad \tilde{g}_{33} = -1$$

при подходящем выборе функций φ, ψ и χ в преобразовании (10.7) (эти функции определяются как интегралы некоторой системы уравнений типа Коши — Ковалевской).

Таким образом, метрический тензор пространства Эйнштейна, допускающего абсолютно параллельное векторное поле, в общем случае представим в виде

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & 1 & Q & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10.8}$$

где A, E, Q — функции координат x^0, x^2, x^3, удовлетворяющие уравнениям (10.2) — (10.3), причем уравнение (10.3) принимает вид

$$R_{0330} - R_{0220} = 0. \tag{10.9}$$

Пользуясь полученными ранее необходимыми и достаточными условиями для полей вырожденного типа 2, связанными лишь с первыми производными от векторных полей (что приводит к дальнейшему упрощению уравнений поля) [74], Кайгородов свел произвол в определении функций E, Q и A к единственному (оставшемуся непроинтегрированным) уравнению второго порядка (10.9).

Окончательный результат этих исследований можно сформулировать так: *для того чтобы пространство Эйнштейна допускало изотропное абсолютно параллельное поле l^α, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат вектор l^α выражался в виде $l^\alpha = \delta^\alpha_1$, а метрика V_4 принимала вид* (10.8), *где функции E, Q, A*

определяются соотношениями

$$A=-1,\ Q=2ex^3,\quad E_{,22}+E_{,33}=4e\quad (e=0,1)$$

(*первый класс решений*) *или соотношениями*

$$A=-[x^3+a]^2,\ B=2b\,({x^3}^2+2ax^3),$$

$$E_{,22}+(x^3+a)^2E_{,33}-\frac{a_2}{x^3+a}E_{,2}+(x^3+a)E_{,3}+$$
$$+\frac{2}{x^3+a}[8\lambda^2(x^3+a)^3-4x^3(x^3+a)(\lambda a_2)_{,0}-(x^3+a)^2a_{,00}-$$
$$-4x^3a_{,20}(x^3\lambda+a)+4x^3a_{,2}a_{,0}\lambda]=0,$$
$$\lambda=\text{const},\ a=a(x^0,\ x^2),\ b=b(x^0)$$

(*второй класс решений*).

Легко убедиться, что перечисленные выше волновые решения Переса, Такено и Петрова являются частными случаями двух выделенных Кайгородовым и Пестовым классов решений, либо приводятся к ним допустимыми преобразованиями координат.

2. Абсолютно параллельное векторное поле в непустом пространстве — времени

Класс решений вида (10.1) допускает обобщение на случай непустого пространства — времени [91].

Пусть пространство — время V_4 имеет метрику вида (10.1), удовлетворяющую (кроме условия $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^1=0$) только трем уравнениям (10.2). Вычисляя компоненты тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$, легко убедиться, что девять его компонент из десяти тождественно обращаются в нуль, а единственная отличная от нуля компонента имеет вид

$$R_{00}=\frac{1}{g}(AR_{0330}+BR_{0220}-2DR_{0230}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для такой метрики удовлетворяются условия Райнича — Уилера (7.14) и Нордтведта — Пагельса (7.15), определяющие тензор энергии — импульса изотропного электромагнитного поля.

Однако полученное таким образом решение уравнений тяготения описывает распространение не только электромагнитных, но и гравитационных волн, так как удовлетворяет критерию полного гравитационного излучения

Лихнеровича (гл. 6). Действительно, так как пространство V_4 с метрическим тензором (10.1) допускает конгруэнцию линий тока ковариантно постоянного вектора l^α, то этот вектор удовлетворяет второму из условий Лихнеровича (6.11). Подставляя затем векторное поле $l_\alpha = \delta^0_\alpha$ и выражения для компонент тензора Римана в первую систему условий Лихнеровича, (6.10), можно убедиться, что она удовлетворяется тождественно.

Таким образом, этот класс решений уравнений Эйнштейна — Максвелла описывает самосогласованную систему свободных электромагнитных и гравитационных волн в пространстве — времени без вещества [91]. Он включает в себя ряд известных волновых решений уравнений Эйнштейна — Максвелла. К ним относятся, например, обобщения решений Переса и Бонди — Пирани — Робинсона на случай непустого пространства — времени, известные под названием «полей типов P и H» (по терминологии Такено [102, 168]).

Некоторые частные случаи таких решений, удовлетворяющие не только критерию Лихнеровича, но и критерию Зельманова, мы уже рассмотрели в гл. 7. Однако следует заметить, что в общем случае эти решения уравнений Эйнштейна—Максвелла описывают самосогласованную систему электромагнитного и гравитационного полей (непустое пространство — время), когда гравитационное поле удовлетворяет критерию Лихнеровича, но, вообще говоря, не удовлетворяет критерию Зельманова. Последнее обстоятельство представляет интерес для выяснения вопроса об общей связи этих двух критериев в случае непустого пространства — времени.

Так как описанный нами класс решений удовлетворяет условиям Лихнеровича (6.10) — (6.11), то, согласно общей теореме, доказанной в п. 3 гл. 6, они принадлежат к вырожденному типу 2 полей тяготения общего вида.

Как было показано в гл. 2, характеристические многообразия, а также бихарактеристики уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла совпадают. Следовательно,траектории распространения плоской гравитационной волны, определяемые абсолютно параллельным векторным полем l^α, одновременно являются траекториями лучей света. В то же время из совпадения фронтов гравитационной и электромагнитных волн вытекает, что электромагнитная волна в пространстве — времени, допускающем абсолютно параллельное векторное поле, также является плоской по Кундту.

Можно показать [169, 170], что описанный класс решений всегда допускает группу движений с особым оператором [106], траектории которого совпадают с траекториями распространения волны (лучами). Кроме того, если данная группа движений является интранзитивной [106], то ее (всегда изотропная) поверхность транзитивности принадлежит фронту волны либо совпадает с ним.

ГЛАВА 11

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Гравитационное излучение аксиально симметричных изолированных систем. Функция информации Бонди

Для изучения асимптотического поведения полей гравитационного излучения удобно воспользоваться методом Бонди — Сакса, основанным на разложении величин, характеризующих поле, в ряд по степеням $1/r$, где r — параметр, играющий роль расстояния от изолированной системы источников. Предполагая, что такое разложение возможно, мы выбираем систему координат так, чтобы, во-первых, максимально упростить вид членов разложения, доминирующих при больших значениях r, и, во-вторых, выявить их волновой характер.

Бонди [20, 171] рассмотрел задачу излучения гравитационных волн аксиально симметричной системой тел, введя, в качестве исходной, следующую метрику пространства — времени:

$$ds^2 = g_{00}\, dx^{0\,2} + 2g_{01} dx^0 dx^1 + 2g_{02} dx^0 dx^2 - g_{22} dx^{2\,2} - g_{33}\, dx^{3\,2}. \quad (11.1)$$

Вид метрики (11.1) был усмотрен из следующей физической аналогии с моделью излучения в плоском пространстве — времени.

Пусть луч света выходит из некоторой точки O, окруженной малой сферой, на которой заданы угловые полярные координаты φ и θ. Введем временноподобную координату