параллельное векторное поле, также является плоской по Кундту.

Можно показать [169, 170], что описанный класс решений всегда допускает группу движений с особым оператором [106], траектории которого совпадают с траекториями распространения волны (лучами). Кроме того, если данная группа движений является интранзитивной [106], то ее (всегда изотропная) поверхность транзитивности принадлежит фронту волны либо совпадает с ним.

ГЛАВА 11

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Гравитационное излучение аксиально симметричных изолированных систем. Функция информации Бонди

Для изучения асимптотического поведения полей гравитационного излучения удобно воспользоваться методом Бонди — Сакса, основанным на разложении величин, характеризующих поле, в ряд по степеням $1/r$, где r — параметр, играющий роль расстояния от изолированной системы источников. Предполагая, что такое разложение возможно, мы выбираем систему координат так, чтобы, во-первых, максимально упростить вид членов разложения, доминирующих при больших значениях r, и, во-вторых, выявить их волновой характер.

Бонди [20, 171] рассмотрел задачу излучения гравитационных волн аксиально симметричной системой тел, введя, в качестве исходной, следующую метрику пространства — времени:

$$ds^2 = g_{00}\, dx^{0\,2} + 2g_{01}dx^0dx^1 + 2g_{02}dx^0dx^2 - \\ - g_{22}dx^{2\,2} - g_{33}\, dx^{3\,2}. \quad (11.1)$$

Вид метрики (11.1) был усмотрен из следующей физической аналогии с моделью излучения в плоском пространстве — времени.

Пусть луч света выходит из некоторой точки O, окруженной малой сферой, на которой заданы угловые полярные координаты φ и θ. Введем временноподобную координату

u, аналогичную «запаздывающему времени» обычной теории, и определим координаты u, θ, φ произвольного события E как значения соответствующих координат точки, в которой луч OE пересекает сферу. Поскольку вдоль луча координаты u, θ, φ постоянны, то траекторию луча света в пространстве — времени можно задать как координатную линию четвертой координаты r. Определенный таким образом вдоль траектории луча аффинный параметр r будем в дальнейшем интерпретировать как расстояние от источника O. В плоском пространстве — времени, выбрав $u = t - r$ в качестве временноподобной координаты, можно представить метрику в виде

$$ds^2 = du^2 + 2\,du\,dr - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \quad (11.2)$$

Для *асимптотически плоского* риманова пространства — времени непосредственным обобщением этой метрики и является метрика (11.1). Более того, выбор системы координат типа (11.2) позволил Бонди устранить в разложении тензора Римана так называемый «логарифмический член» вида $(\ln r)/r$, появление которого Бонди считал недостатком подхода. В задаче об излучении аксиально симметричной системы Бонди задался следующим метрическим тензором в интервале (11.1):

$$\begin{aligned} g_{00} &= r^{-1}B\exp 2\beta - r^2A^2\exp 2\gamma, \\ g_{01} &= \exp 2\beta,\ g_{02} = Ar^2\exp 2\gamma, \\ g_{22} &= -r^2\exp 2\gamma,\ g_{33} = -r^2\sin^2\theta\exp(-2\gamma). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Здесь β, γ, A и B — функции координат r, θ, u, не зависящие от φ. В выбранной таким образом системе координат аксиально симметричная метрика (11.1), (11.3), как мы увидим ниже, не содержит логарифмического члена в разложении по $1/r$.

Из десяти уравнений поля (2.2) для метрики (11.3) три удовлетворяются тождественно:

$$R_{03} = R_{13} = R_{23} = 0.$$

Из оставшихся семи уравнений четыре уравнения

$$R_{11} = R_{12} = R_{22} = R_{33} = 0 \quad (11.4)$$

являются независимыми, одно уравнение

$$R_{01} = 0$$

удовлетворяется вследствие (11.4), а компоненты R_{02} и R_{00}, в силу тождества Бианки, удовлетворяют соотношениям

$$(r^2 R_{02})_{,1} = 0, \quad (r^2 R_{00})_{,1} = 0, \tag{11.5}$$

т. е. не содержат членов выше второго порядка по $1/r$.

Система четырех уравнений (11.4) для четырех неизвестных β, γ, A, B («основные уравнения», по терминологии Бонди) принадлежит к группе уравнений $R_{ij} = 0$, определяющих, как мы видели в гл. 2, поведение решения в окрестности начальной гиперповерхности S в зависимости от начальных данных на ней. Система основных уравнений обладает следующим замечательным свойством: она не содержит вторых производных типа $g_{ij,00}$, а из производных типа $g_{jk,0i}$ содержит лишь одну, $\gamma_{,01}$. Это означает, что задание функции $\gamma(r, \theta, u)$ на начальной гиперповерхности $u = \text{const}$,

$$\gamma(r, \theta) = \gamma(r, \theta, u)\,|_{u=\text{const}}$$

определяет не только сами функции γ, β, A и B, но и производную $\gamma_{,0}$, т. е. определяет поведение решения в окрестности гиперповерхности $u = \text{const}$ с точностью до произвола в выборе функций интегрирования. Поскольку уравнения содержат только производные по r от искомых функций, то пять функций интегрирования будут зависеть только от координат u и θ. Одну из них следует положить равной нулю, чтобы удовлетворить требованию регулярности метрики при больших r; еще одна функция устраняется преобразованием координат, сохраняющим вид метрики. В результате разложение метрики в ряд по степеням $1/r$,

$$\begin{aligned}
\gamma &= C(u, \theta)/r + C_{,0}(u, \theta)/r^2 + \ldots, \\
\beta &= -C^2/4r^2 + \ldots, \qquad\qquad (11.6)\\
U &= -\frac{1}{r^2}(C_{,2} + 2C \operatorname{ctg}\theta) + \\
&\qquad + \frac{1}{r^3}[F(u, \theta) + 3CC_{,2} + 4C^2 \operatorname{ctg}\theta] + \ldots, \\
V &= r + G(u, \theta) + \ldots,
\end{aligned}$$

определяется тремя функциями интегрирования — C, F и G. Поскольку эти функции связаны двумя дополнительными соотношениями (11.5):

$$G_{,0} = \frac{1}{2}(C_{,22} + 3C_{,2}\operatorname{ctg}\theta - 2C)_{,0} - (C_{,0})^2, \qquad (11.7)$$

$$-3F_{,0} = G_{,2} + 3CC_{,02} + 4CC_{,0}\operatorname{ctg}\theta + C_{,0}C_{,2}, \qquad (11.8)$$

то независимой можно считать только одну из них, например $C(u, \theta)$. Таким образом, значение $C(u, \theta)$ и ее производной $C_{,0}$ по «запаздывающему времени» u на гиперповерхности $u = a = \mathrm{const}$ полностью определяет решение в окрестности гиперповерхности, т. е. в некотором интервале ($a \leqslant u \leqslant b$). Тем самым всякое необратимое изменение системы источников определяется величиной

$$C_{,0} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, \theta), \qquad (11.9)$$

заключающей в себе всю информацию о поведении системы с изменением u. Функция $C_{,0}$ называется *функцией информации* [1]) системы [171]. Важнейшая роль функции информации состоит в том, что она определяет долю массы системы, уносимую гравитационным излучением.

Пусть система источников стационарна все время до момента $u = a$ и после периода нестационарности вновь приходит в стационарное состояние в момент $u = b$. Определение функции информации позволяет найти массу, теряемую системой в течение интервала времени $a \leqslant u \leqslant b$. Стационарным полем, отвечающим аксиально симметричной метрике (11.3), является гравитационное поле, описываемое метрикой Вейля (см. Синг [172]):

$$ds^2 = \exp(2\psi)dt^2 - \\ - \exp(-2\psi)[\exp(2\sigma)(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]. \qquad (11.10)$$

Разлагая функцию ψ в ряд по мультипольным моментам системы источников и записывая метрику (11.10) в координатах Бонди u, r, θ, φ, находим связь функций G и F с мультипольными моментами аксиально симметричной системы:

$$G = 2M, \quad F = 2D\sin\theta. \qquad (11.11)$$

Здесь M — масса системы источников («монопольный

---

[1]) Часто употребляют также название «функция новостей Бонди» (news function).

момент») и D — ее дипольный момент. Возвращаясь к общей метрике (11.3), мы можем определить массу системы источников как среднее от $G(u, \theta)$ по углу:

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi G(u, \theta)\sin\theta\, d\theta. \qquad (11.12)$$

Интегрируя затем уравнение связи (11.7), получаем выражение для убыли массы со временем через функцию информации:

$$M_{,0} \equiv \frac{dM}{du} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (C_{,0})^2 \sin\theta\, d\theta \leqslant 0. \qquad (11.13)$$

Формула (11.13) означает, что масса изолированной аксиально симметричной системы источников постоянна в том и только в том случае, когда функция информации системы равна нулю. В противном случае масса системы монотонно уменьшается.

В связи с этим можно сформулировать следующий критерий гравитационного излучения для аксиально симметричных изолированных систем:

Критерий Бонди. *Поле тяготения изолированной аксиально симметричной системы источников, определяемое метрикой* (11.1), (11.3), *является полем гравитационного излучения, если функция информации* (11.9) *системы отлична от нуля. В противном случае гравитационное излучение отсутствует* [1]).

---

[1]) Заметим, что обращение в нуль функции информации не означает стационарности системы. Так, из соотношения (11.8) следует, что при $C_{,0} = 0$ и $G_{,2} \neq 0$ величина $F_{,0}$ отлична от нуля, что, вследствие второй формулы (11.11), означает линейное увеличение дипольного момента системы со временем. Вопрос о том, какой вклад в энергию и импульс, теряемые изолированной системой, вносят монопольный и дипольный члены разложения потенциалов в ряд, не является тривиальным и составляет предмет специального исследования. В рамках линейного приближения эйнштейновской теории тяготения этот вопрос недавно был рассмотрен Папапетру [173]. Оказалось, что возникающие формально эффективные монопольный и дипольный члены разложения в действительности сводятся к квадрупольному моменту системы источников (квадрупольные моменты так называемых «электрического» и «магнитного» типов). В то же время квадрупольный момент системы нельзя рассматривать как эффективный момент, сводимый к мультипольным моментам более высоких порядков.

2. Формализм Ньюмэна — Пенроуза

Вычисляя для метрики Бонди компоненты тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и разлагая их в ряд по $1/r$, можно убедиться [171], что они разбиваются на три группы равных (с точностью до знака) компонент, причем в компонентах первой группы разложение начинается с члена третьего порядка малости, $2(G + CC_{,0})\,r^{-3}$, в компонентах второй группы — с члена второго порядка, $(C_{,02} + 2C_{,0}\operatorname{ctg}\theta)\,r^{-2}$, и в компонентах третьей группы — с члена первого порядка, $C_{,00}r^{-1}$. Это означает, что при $C_{,00} \neq 0$ гравитационное поле на больших расстояниях убывает обратно пропорционально r.

Стремясь устранить из этого результата элемент произвола, связанный с выбором «преимущественной» системы координат, Ньюмэн и Пенроуз предприняли попытку исследовать вместо координатных компонент тензора Римана его тетрадные компоненты.

Воспользуемся для этой цели формализмом Ньюмэна — Пенроуза [174], который позволяет, кроме того, инвариантным образом сформулировать «законы сохранения» мультипольных моментов.

Метод Ньюмэна — Пенроуза основан на предположении о существовании в выбранной области многообразия V_4 четырех изотропных дифференцируемых векторных полей[1]) (класс гладкости их должен совпадать с классом гладкости компонент метрики $g_{\mu\nu}$), два из которых удобно выбрать комплексно сопряженными. В координатах Бонди ($x^0 = u$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) эти векторные поля можно задать следующим образом:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \qquad n^\mu = \delta_0^\mu - \delta_1^\mu,$$
$$m^\mu = \frac{1}{r}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\,\delta_3^\mu\right), \quad \overline{m}^\mu = \frac{1}{r}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\,\delta_3^\mu\right). \tag{11.14}$$

Ньюмэн и Пенроуз [174] и независимо от них в другой форме Кайгородов [74] показали, что метрика $g_{\mu\nu}$ может быть представлена в виде комбинации

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu,$$

[1]) Существование таких векторов отнюдь не гарантировано общем случае. Однако для полей тяготения, создаваемых островными распределениями источников, при наложении некоторых асимптотических (граничных) условий такие векторы всегда существуют.

причем

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = \bar{m}_\mu m^\mu = 0.$$

Десять независимых вещественных компонент тензора Римана в вакууме ($R_{\alpha\beta} = 0$) можно однозначно охарактеризовать пятью комплексными скалярами («тетрадными компонентами тензора Римана» [1])):

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta, \\
\Phi_1 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta, \\
\Phi_2 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta, \\
\Phi_3 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\gamma n^\delta, \\
\Phi_4 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Гравитационное излучение называется уходящим от системы или падающим (на систему), в зависимости от того, ищем ли мы решение, задав начальные данные (в нашем случае функцию информации) на изотропной гиперповерхности абсолютно будущего или абсолютно прошлого (в линеаризованной теории тяготения соответствующие решения волнового уравнения называются запаздывающими или опережающими потенциалами). Предполагая, что в излучении присутствуют только уходящие волны, т. е. отвлекаясь от рассеяния системой падающего на нее внешнего излучения [2]), а также задаваясь определенным классом L функций Φ_A ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) в формулах (11.15), можно показать [175, 176], что в асимптотически плоском пространстве — времени один из скаляров Φ_A, например $\Phi_{A'}$, допускает разложение вида

$$\Phi_{A'} = \sum_{n=0}^{L} r^{-(5+n)}\, \overset{n}{\Phi}_{A'} + O\left(r^{-(5+L)}\right),$$

где коэффициенты разложения $\overset{n}{\Phi}_{A'}$ не зависят от r.

Пусть этим скаляром будет Φ_0. Согласно Ньюмэну и Пенроузу [177], класс гладкости для него достаточно

---

[1]) Такие компоненты можно определить для любого тензора, обладающего всеми алгебраическими свойствами тензора Римана в пустоте, например для тензора Вейля.

[2]) Рассеяние падающего на систему тел гравитационного излучения рассматривали Зерилли [178, 408], Вишвешвара [179], Куч, Киннерсли и Торренс [180, 181].

принять равным 2:

$$\Phi_0 = \Phi_0^0 r^{-5} + \Phi_0^1 r^{-6} + \Phi_0^2 r^{-7} + O(r^{-7}). \tag{11.16}$$

Тогда, используя тождества Бианки и следующее из них в случае (2.2) тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot,\,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 0,$$

можно получить асимптотические разложения остальных Φ_A:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^0 r^{-4} + O(r^{-5}), \quad \Phi_2 = \Phi_2^0 r^{-3} + O(r^{-4}), \\ \Phi_3 &= \Phi_3^0 r^{-2} + O(r^{-3}), \quad \Phi_4 = \Phi_4^0 r^{-1} + O(r^{-2}), \end{aligned} \tag{11.17}$$

где Φ_1^0, Φ_2^0, Φ_3^0, Φ_4^0 не зависят от r. Для метрики Бонди коэффициенты Φ_A^0 зависят только от θ и u, причем

$$\Phi_4^0 = C(u,\,\theta)_{,00}.$$

В случае аксиальной симметрии коэффициенты Φ_A^0 разложений (11.16) — (11.17) выражаются через присоединенные функции Лежандра [182, 183]:

$$\begin{aligned} &\Phi_4^0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(u)\,P_n^2(\cos\theta),\quad \Phi_3^0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(u)\,P_n^1(\cos\theta), \\ &\Phi_2^0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u)\,P_n^0(\cos\theta),\quad \Phi_1^0 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(u)\,P_n^1(\cos\theta), \\ &\Phi_0^m = \sum_{n=2}^{\infty} h_n^m P_n^2(\cos\theta). \end{aligned} \tag{11.18}$$

В таком виде коэффициенты разложения обнаруживают аналогию с запаздывающими потенциалами волнового уравнения специальной теории относительности.

Действительно, в плоском пространстве — времени аксиально симметричное решение волнового уравнения в полярных координатах имеет вид

$$\varphi^{(n)} = \psi^{(n)}(r,\,u)\,P_n(\cos\theta), \tag{11.19}$$

где функции $\psi^{(n)}$ определяются как решение уравнений

$$\psi_{,11}^{(n)} - 2\psi_{,01}^{(n)} + 2r^{-1}(\psi_{,1}^{(n)} - \psi_{,0}^{(n)}) - r^{-2}n(n+1)\psi^{(n)} = 0 \tag{11.20}$$

и описывают 2^n-мультипольное излучение. В свою очередь, решение уравнений (11.20) выражается в виде конечного ряда по степеням параметра r^{-1}:

$$\psi^n = \sum_k \overset{n}{\underset{(k)}{L}}(u)\, r^{-(k+1)},$$

причем коэффициенты ряда удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$2(k+1)\frac{d}{du}\overset{(n)}{\underset{(k+1)}{L}} = (n-k)(n-k+1)\overset{(n)}{\underset{(k)}{L}}.$$

Учитывая эту аналогию, можно рассматривать характеризующие тензор Римана величины Φ_A как решение общековариантного волнового уравнения типа Зельманова (7.4).

Эта аналогия позволяет определить мультипольные моменты аксиально симметричной системы источников следующим образом:

монополь (масса) $$M = -\frac{1}{4}\int_0^\pi (\Phi_2^0 + \bar{\Phi}_2^0)\, P_0^0(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{11.21}$$

дипольный момент $$D = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_1^0 P_1^1(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{11.22}$$

квадрупольный момент $$Q = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_0^0 P_2^0(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

и т. д.

Для метрики Бонди (11.3) на основе (11.21) получаем:

$$M = M_B + \frac{1}{4}\int_0^\pi (C\bar{C})_{,0}\sin\theta\, d\theta, \tag{11.23}$$

где M_B обозначает массу системы по Бонди, определенную формулой (11.12). Аналогично, закон сохранения массы Бонди (11.13) примет вид

$$\frac{dM_B}{du} = -\frac{1}{2}\int C_{,0}\bar{C}_{,0}\sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4}\int (C\bar{C})_{,00}\sin\theta\, d\theta. \tag{11.24}$$

Определение (11.21) следует признать более общим, чем определение Бонди (11.12), так как оно не связано с выбором частной системы координат. Согласно интерпретации, предложенной Ньюмэном, величина M может рассматриваться как полная масса, включающая энергию излучения, тогда как величина M_B представляет массу системы в стационарном состоянии («вейлевскую» массу).

3. Гравитационное излучение произвольных изолированных систем. Метрика Сакса

Мы видели, что тетрадные компоненты тензора Римана для метрики Бонди распадаются на три группы, в одной из которых доминирующими на больших расстояниях являются члены порядка r^{-1}, в другой — порядка r^{-2} и в третьей — порядка r^{-3}. Таким образом тензор Римана удалось представить в виде суммы трех членов, пропорциональных соответственно первой, второй и третьей обратным степеням аффинного параметра r:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^{-1}\cdot N_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-2}\cdot \mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \mathrm{I}_{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot O(r^{-3}), \quad (11.25)$$

причем оказалось, что $N_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathrm{I}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — некоторые тензоры, обладающие алгебраическими свойствами тензоров Римана, соответственно, типов N, III и I по Петрову. Аналогичное разбиение было установлено Робинсоном и Траутманом для найденного ими решения уравнений тяготения, которое описывает сферические гравитационные волны:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^{-1}N_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-2}\,\mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-3}D_{\alpha\beta\gamma\delta}\,; \quad (11.26)$$

здесь $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор, обладающий алгебраической структурой тензора Римана типа D. Следует сказать, что уверенность в физической содержательности этих результатов подкрепляется также тем, что в случае электромагнитного излучения, как показали Гольдберг и Сакс [184], имеет место разбиение тензора поля $F_{\mu\nu}$, несомненно допускающее интерпретацию на языке ближней зоны (индукции) и дальней (волновой) зоны. Иными словами, общая физическая аналогия между теорией электромагнитного излучения и описанным выше подходом Бонди — Сакса указывает на правомерность интерпретации результатов Бонди — Сакса в терминах волновой зоны излучения (члены типов N и III) и зоны индукции (члены типов I и D).

Действительно, на больших расстояниях от излучающей системы доминируют члены типа N (волновая зона), а на малых расстояниях от источников — члены типа I и D, описывающие свойства стационарного поля (типа Вейля для метрики Бонди и типа Шварцшильда для метрики Робинсона — Траутмана). При этом член $N_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для метрики Бонди пропорционален $C_{,00}$, что характеризует связь функции информации $C_{,0}$ с асимптотикой поля излучения.

Сакс [185] предложил обобщение разложения (11.25) на случай гравитационного излучения произвольных островных систем.

Легко видеть, что координатные линии φ в системе координат Бонди являются траекториями векторного поля Киллинга [58], нормального к некоторой трехмерной гиперповерхности. Допуская, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ может зависеть не только от u, r, θ, но и от координаты φ, построим более общую координатную систему, которая отвечала бы произвольной системе источников, не обнаруживающей никакой пространственной симметрии.

Пусть $u\,(x^\alpha)$ — скалярное поле, определяющее изотропную трехмерную гиперповерхность (2.15), т. е. удовлетворяющее уравнению эйконала (2.22):

$$g^{\alpha\beta}u_{,\alpha}u_{,\beta} = 0.$$

Пусть, далее, существует конгруэнция изотропных геодезических линий с направляющим вектором $l_\alpha = u_{,\alpha}$, ортогональная к гиперповерхности $u = \text{const}$. Введем также θ и φ — две скалярные функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$\theta_{,\alpha}l^\alpha = \varphi_{,\alpha}l^\alpha = 0. \tag{11.27}$$

Определим далее скаляр r,

$$r^4 = (K\sin\theta)^{-1}, \tag{11.28}$$

где

$$K \equiv (g^{\alpha\beta}\theta_{,\alpha}\theta_{,\beta})(g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}) - (g^{\alpha\beta}\theta_{,\alpha}\theta_{,\beta})^2 > 0.$$

Условие $K \neq 0$ является следствием уравнений (11.27); требование $K > 0$ достаточно, чтобы скаляр r был вещественным и положительным.

Можно показать [185], что асимптотически плоское пространство — время V_4 может удовлетворить всем перечисленным требованиям в том и только в том случае, если в координатах Бонди его метрика представима в виде

$$ds^2 = Br^{-1} \exp(2\beta)\, du^2 + 2 \exp(2\beta)\, du\, dr - \\ - r^2 H_{ab} (dx^a - A^a du)(dx^b - A^b du) \qquad (11.29)$$

$$(a, b = 2, 3),$$

где двумерная квадратичная форма $h_{ab}\, dx^a\, dx^b$ имеет вид

$$2h_{ab}\, dx^a\, dx^b = [\exp(2\gamma) + \exp(2\delta)]\, d\theta^2 + \\ + 4 \operatorname{sh}(\gamma - \delta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \\ + [\exp(-2\gamma) + \exp(-2\delta)] \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

а входящие в метрику шесть функций V, U^a ($a = 2, 3$), β, γ, δ зависят от всех четырех координат u, r, θ, φ.

Потребовав, чтобы координатные линии φ (u, r, $\theta =$ $=$ const) являлись траекториями некоторого нормального поля векторов Киллинга, получим как частный случай аксиально симметричную метрику Бонди, определяемую условиями

$$\gamma = \delta, \qquad u^3 = 0, \; \partial g_{\alpha\beta}/\partial\varphi = 0. \qquad (11.30)$$

4. Геодезические лучи. Теорема расщепления

Одним из предположений, при которых была получена метрика Сакса (11.29), было существование в V_4 конгруэнции изотропных геодезических (называемых *геодезическими лучами*). В связи с этим рассмотрим типы полей тяготения, допускающие геодезические лучи.

Как мы уже отмечали в гл. 8, всякое пустое пространство — время V_4 допускает по крайней мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля l^α (векторы Дебеве), удовлетворяющих алгебраическим соотношениям (3.29) — (3.32), где вместо тензора Вейля в нашем случае будет фигурировать сам тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Векторы Дебеве, вообще говоря, не являются направляющими векторами конгруэнций изотропных геодезических. Однако, как показал Сакс [110], все алгебраически специальные пустые пространства V_4, т. е. пространства типов D, II, N и III по Петрову, допускают геодезическое изотропное векторное поле l^α:

$$l^\alpha l^\beta_{;\alpha} = 0, \qquad (11.31)$$

удовлетворяющее условию (3.31), а потому и заведомо условию (3.32). При этом соответствующая конгруэнция геодезических лучей обладает равной нулю дисторсией (теорема Гольдберга — Сакса, см. [184, 185]):

$$2\sigma^2 \equiv l_{(\alpha;\beta)} l^{\alpha;\beta} - \frac{1}{2} (l^{\alpha}_{;\alpha})^2 = 0. \tag{11.32}$$

Если существует решение уравнения эйконала (2.22), то условие (11.32) означает отсутствие искажения формы тени, отбрасываемой на экран непрозрачным плоским предметом, ориентированным ортогонально лучам. В зависимости от того, равно нулю (или не равно нулю) растяжение конгруэнции

$$\varepsilon = \frac{1}{2} l^{\alpha}_{;\alpha}, \tag{11.33}$$

фронт волны отвечает плоским (или сферическим) гравитационным волнам [1]).

Это наводит на мысль, что алгебраически специальные поля отвечают гравитационным волнам вдали от системы источников, в то время как алгебраически общие поля представляют гравитационное поле вблизи источников, «возмущающее» фронт гравитационной волны. Для математического обоснования этого вывода рассмотрим асимптотическое поведение тензора Римана асимптотически плоского пространства — времени, описываемого метрикой Сакса.

Предполагая, что функции, входящие в метрику Сакса (11.29), бесконечно дифференцируемы по r (что, вообще говоря, как мы увидим, не обязательно), и разлагая их в ряд Тейлора по степеням параметра r^{-1}, можно прямым вычислением с учетом уравнений поля (2.2) убедиться, что

---

[1]) Если пространство — время допускает изотропную геодезическую конгруэнцию с отличной от нуля дисторсией, то соответствующее поле гравитационного излучения интерпретируется как поле *цилиндрических волн*. Примерами аксиально симметричных полей тяготения такого типа с бесконечным линейным распределением источников являются решение Эйнштейна — Розена [187], а также обобщающие его решения Иордана — Элерса [188] и Компанейца [189]. В отличие от рассмотренных ранее полей плоских и сферических волн, они принадлежат к алгебраически общему типу I и, подобно гравитационным полям островных источников (Бонди и Сакса), допускают расщепление на члены типа N, II и I (см. работы Стэхеля [188] и Мардера [190—192]). Специальному рассмотрению волновых свойств нестационарных аксиально симметричных полей тяготения посвящены исследования Вебера — Уилера [193] и Кришны [194—196].

все Φ_A в (11.15) отличны от нуля, причем разложения их в ряды начинаются с членов разных порядков: от r^{-1} до r^{-5}. Принимая во внимание общие формулы Ньюмэна (11.16)—(11.17) для асимптотики Φ_A, можно прийти к следующему *расщеплению тензора Римана* (*«теорема о расщеплении» Сакса* [110]):

$$R = {}_0Nr^{-1} + {}_0\mathrm{III}r^{-2} + {}_0\mathrm{II}r^{-3} + {}_0\mathrm{I}r^{-4} + \mathrm{I}'r^{-5} + \ldots \quad (11.34)$$

Здесь ${}_0N$, ${}_0\mathrm{III}$, ... означают, соответственно, тензоры с алгебраической структурой тензоров Римана типов N, III и т. д. (индексы для краткости опущены), а индекс 0 слева означает, что эти тензоры ковариантно постоянны вдоль соответствующих геодезических лучей. В четвертом и пятом членах I' и ${}_0\mathrm{I}$ различаются тем, что тензор I' не обладает, а ${}_0\mathrm{I}$ обладает геодезическими лучами. При этом сумма членов до некоторого данного порядка включительно оказывается тензором того же алгебраического типа, что и ее последний член. Коэффициент ${}_0N$ пропорционален $\bar{C}_{,00}$, где $\bar{C}_{,0}$ — функция, переходящая при условиях (11.30) в функцию информации Бонди. В частности, при $C_{,0}=0$ для метрики Бонди ${}_0N = {}_0\mathrm{III} = {}_0\mathrm{II} = 0$, и мы приходим к стационарной аксиально симметричной метрике Вейля (11.10).

На основании теоремы расщепления, гравитационным полям источников островного типа можно дать следующую алгебраическую интерпретацию. Поле, создаваемое материальной системой в окружающем ее пустом пространстве, принадлежит к первому типу (I или D) по Петрову. Если система излучает, то на расстояниях, значительно превышающих размеры самой системы и длину волны ее излучения (т. е. в волновой зоне), гравитационное поле будет приближенно типа N. Иными словами, с точки зрения наблюдателя, который покоится на большом расстоянии (в фиксированном направлении) относительно излучающей системы, в тензоре Римана будут превалировать члены типа N, а для наблюдателя, удаление которого от системы мало по сравнению с размерами самой системы и длиной волны ее излучения (ближняя зона), в тензоре Римана будут превалировать члены типа I или D, в зависимости от характера волнового фронта. Наконец, на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы источников, но малых по сравнению с длиной волны ее излучения (переходная зона), гравитационное поле описывается тензором Римана типа II или III, в зависимости от характера распределения источников.

Как показали Сакс [148, 185] и Персидес [197], при некоторых специальных предположениях (разложимость метрики в бесконечный ряд по r^{-1}, евклидова асимптотика на бесконечности) расщепление тензора Римана (11.34) осуществимо для произвольных гравитационных полей в пустом пространстве, обладающих геодезическими лучами. Возможность этого гарантируется полученными выше условиями (11.16) — (11.17), определяющими асимптотику тетрадных компонент тензора Римана. В случаях, когда пространство — время не допускает конгруэнции геодезических лучей, Леман [198] и Гольдберг [199] сформулировали и доказали более слабое утверждение: в этих случаях одно из изотропных векторных полей Дебеве является асимптотически геодезическим, т. е.

$$l_{\alpha;\beta}\, l^{\beta} = O(r^{-n}) \qquad (n \geqslant 2). \tag{11.35}$$

Если предположить, что расщепление (11.34) для этого случая сохраняется, то вектор l^{α} уже не будет направляющим для геодезического луча в пространствах, соответствующих тензорам разложения N, III и т. д. Однако при этом должна существовать конгруэнция изотропных геодезических с касательным вектором l'^{α}, являющихся асимптотами траекторий вектора l^{α}. Тогда можно ожидать, что конгруэнция l'^{α} представляет геодезические лучи только в пространстве — времени, отвечающем первым четырем членам расщепления (11.34):

$$l'_{[\rho} R_{\alpha]\beta\gamma[\delta}\, l'_{\sigma]}\, l'^{\beta}\, l'^{\gamma} = O(r^{-5}), \tag{11.36}$$

т. е. является вектором Дебеве асимптотически.

Наконец, если векторное поле l'^{α} удовлетворяет условию (11.36) и, кроме того, является градиентным, $l_{\alpha}' = \varphi_{,\alpha}$, то, как показали Ньюмэн и Пенроуз [174], расщепление (11.34) всегда имеет место.

5. Общая алгебраическая структура тензора Римана

Формула расщепления Сакса (11.34), очевидно, не является общековариантной, так как параметр r играет роль координатного расстояния вдоль геодезической. Однако алгебраическая классификация канонических типов тензора Римана позволяет сформулировать разбиение тензора Римана алгебраически общей структуры общековариантным образом.

Для этой цели мы воспользуемся формализмом Ньюмэна — Пенроуза. В изотропной комплексной тетраде (l^μ, n^μ, m^μ, $\bar{m}^\mu$), векторы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &l_\alpha l^\alpha = n_\alpha n^\alpha = m_\alpha m^\alpha = l_\alpha m^\alpha = n_\alpha m^\alpha = 0, \\ &l_\alpha n^\alpha = m_\alpha \bar{m}^\alpha = 1, \end{aligned} \tag{11.37}$$

определим три простых бивектора

$$\begin{aligned} &V_{\alpha\beta} = 2l_{[\alpha}\bar{m}_{\beta]}, \quad U_{\alpha\beta} = 2n_{[\alpha}m_{\beta]}, \\ &M_{\alpha\beta} = 2l_{[\alpha}n_{\beta]} + 2\bar{m}_{[\alpha}m_{\beta]}. \end{aligned} \tag{11.38}$$

Тогда, как показали Каммерер [200] и Сзекерес [134], всем возможным алгебраическим типам тензора Римана в пустоте отвечает следующая общая комбинация:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + i\,{}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_1 V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} + C_2 (V_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + \\ + M_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta}) + C_3 (M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + U_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} + V_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) + \\ + C_4 (U_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + M_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) + C_5 U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}, \end{aligned} \tag{11.39}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные скаляры.

Используя канонический вид матрицы $\| R_{ab} \|$ тензора Римана в бивекторном пространстве R_6, можно показать, что каждому типу поля тяготения (гл. 3) отвечает разложение тензора Римана на бивекторы (11.38), отвечающее тому или иному частному случаю выражения (11.39), где какие-то из скаляров $C_1, \ldots, C_5$ (не более четырех) равны нулю. Задача выражения тензора Римана в случае пустых пространств (а в общем случае — тензора Вейля) через бивекторы для всех типов полей тяготения была решена Дебеве [81]. Сопоставляя результаты Дебеве с выражением (11.39), можно прийти к следующим выводам. Пусть данное поле тяготения — алгебраически специальное. Тогда $C_4 = C_5 = 0$, т. е. разложение (11.39), вообще говоря, состоит лишь из первых трех членов; в этом случае векторное поле l^α определяет геодезические лучи. Пусть, кроме того, $C_3 = 0$. Тогда тензор Римана принадлежит к типу III. Для случая $C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ поле тяготения имеет тип N с вектором l^α в качестве вектора Дебеве. Наконец, условие $C_3 \neq 0$ характеризует поля типов II и D.

Сопоставляя выражение (11.39) с формулой расщепления Сакса (11.34), мы видим, что каждый из пяти первых членов асимптотического разложения тензора Римана в ряд по r^{-1} обладает алгебраической структурой соответствующего члена в выражении (11.39). Поэтому представляет интерес исследовать асимптотическое поведение коэффициентов $C_1, \ldots, C_5$ в (11.39). Для этого на геодезическом луче с касательным вектором l^α выберем канонический параметр r. Если считать, что условие $r \to \infty$ всегда отвечает асимптотическому значению тензора Римана, то в общем случае нет необходимости предполагать пространство — время асимптотически плоским. Более того, вместо жесткого условия Сакса о бесконечной дифференцируемости метрики по параметру r ограничимся лишь предположением о том, что компоненты тензора Римана, а также векторов l^α, n^α, m^α, $\bar{m}^\alpha$ являются функциями координат класса C^6 (что отвечает нашей задаче исследования асимптотического поведения первых пяти членов разложения в ряд по r^{-1}).

Подставим выражение (11.39) в тождества Бианки и будем рассматривать последние как уравнения относительно функций $C_1, \ldots, C_5$. Исследуя главные (по порядку малости) члены решения этих уравнений, найдем, что *при* $r \to \infty$ *коэффициенты* C_N *в* (11.39), $N = 1, 2, 3, 4, 5$, *стремятся к нулю, соответственно, как* $1/r^N$.

Таким образом теорема расщепления Сакса будет доказана при гораздо более общих предположениях. Строгое доказательство такого рода впервые дал Каммерер [200]; он предполагал гладкость класса C^5, так что его доказательство охватывает лишь первые четыре члена в (11.39). Это соответствует тому, что лишь для первых четырех членов в (11.39) существуют геодезические лучи. Результат Каммерера может быть обобщен и на пятый член, если воспользоваться, например, соображениями об асимптотически геодезических конгруэнциях.

6. Асимптотические симметрии. Группа Бонди — Метцнера

На основании теоремы расщепления мы могли убедиться, что на больших расстояниях от системы источников свойства даже асимптотически плоских гравитационных волновых полей оказываются алгебраически сложными. Нетривиальный характер асимптотики полей гравитационного излучения Бонди и Сакса особенно явно выступает при исследовании их асимптотических симметрий.

Действительно, исходя из физических соображений, казалось бы, можно ожидать, что на асимптотической гиперповерхности $r \to \infty$ действует группа движений метрики, порядок которой совпадает с порядком максимальной подвижности пространства V_4 соответствующего типа, т. е. типа N по Петрову. Однако ввиду того, что на больших расстояниях поле излучения островной системы описывается структурой тензора Римана типа N лишь *приближенно*, оказывается, что не существует группы движений, которая сохраняла бы асимптотику поля, а также граничные условия. Однако существует группа преобразований координат, удовлетворяющая этим требованиям; для аксиально симметричных островных распределений источников она называется группой Бонди — Метцнера [171]. Эта группа содержит в себе группу Лоренца как подгруппу (не являющуюся, однако, нормальной) и включает в себя, кроме того, бесконечномерную группу «супертрансляций».

В физической интерпретации группы Бонди — Метцнера большую роль сыграл тот факт, что функция информации $C_{,0}$ имеет относительно этой группы очень простые трансформационные свойства. Это позволяет выразить в терминах инвариантов группы сохраняющиеся интегральные величины. Обобщение группы Бонди — Метцнера на случай произвольных систем островного типа было предложено Саксом [148].

7. Асимптотические свойства полей Эйнштейна — Максвелла

Метод Бонди — Сакса был обобщен также на случай гравитационного излучения островных систем в непустом пространстве — времени (Козаржевский [201], Хокинг [202], Стэхель [203]). В частности, Козаржевский [201] показал, что асимптотическое поведение гравитационного поля, порождаемого произвольными изолированными системами электрически заряженных тел, также определяется формулой расщепления Сакса. Этот результат представляется естественным, поскольку геодезические лучи являются траекториями распространения как гравитационного, так и электромагнитного излучения.

Аналогия между гравитационным и электромагнитным полями отчетливо проявляется и в их асимптотическом поведении. Так, на основе интегральной формы уравнений Максвелла Гольдберг и Керр [152] установили, что электромагнитное поле ограниченного распределения зарядов и токов допускает следующее асимптотическое разложение:

$$F_{\mu\nu} = r^{-1} N^F_{\mu\nu} + r^{-2}\, \mathrm{III}^F_{\mu\nu} + r^{-3} J_{\mu\nu}. \tag{11.40}$$

Здесь r — аффинный параметр, изменяющийся вдоль градиентных изотропных направлений l^α, т. е. вдоль электромагнитных лучей, все компоненты $J_{\mu\nu} = J_{[\mu\nu]}$ — ограниченные сверху функции, а антисимметричные тензоры $N^F_{\mu\nu}$ и $\mathrm{III}^F_{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям:

$$N^F_{\mu\nu} l^\nu = 0, \qquad \mathrm{III}^F_{\mu\nu} l^\nu = a l_\mu \quad (a \text{ — скаляр}), \tag{11.41}$$

в полной аналогии с алгебраическими соотношениями, характерными для тензоров Римана, соответственно, типов N и III по Петрову.

Из формулы (11.40) вытекает, что в системе координат, в которой параметр r характеризует расстояние от системы источников излучения, вдали от системы поле $F_{\mu\nu}$ становится изотропным, т. е. удовлетворяет соотношениям:

$$l_{[\lambda} F_{\beta\gamma]} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0. \tag{11.42}$$

Однако, как показал Шевретон [149], условия (11.42) являются лишь необходимыми, но не достаточными для *плоских* электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского: для того чтобы электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ отвечало случаю именно плоских волн, необходимо и достаточно, чтобы, кроме условий (11.42), выполнялись также условия:

$$l_{[\lambda} F_{\beta\gamma],\,\sigma} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta,\,\sigma} = 0. \tag{11.43}$$

Рассмотрим условия (11.42) — (11.43) в общем случае искривленного пространства — времени. Как показал Марио [260, 261], траектории векторного поля l^α, удовлетворяющего соотношениям (11.42), образуют конгруэнцию изотропных геодезических (11.31). Ковариантно дифференцируя соотношения (11.42) и принимая во внимание условия (11.43), получаем:

$$F_{[\beta\gamma}\, l_{\lambda];\,\sigma} = 0, \qquad F_{\alpha\beta}\, l^\alpha_{;\,\sigma} = 0, \tag{11.44}$$

откуда следует [149], что тензор $l_{\lambda;\,\sigma}$ может быть представлен в виде произведения двух векторов:

$$l_{\lambda;\,\sigma} = A_\sigma\, l_\lambda, \tag{11.45}$$

где A_σ — вектор, ортогональный вектору l_λ. Из формул (11.45) автоматически следует, что для конгруэнции геодезических, определяемой вектором l^α, вращение ω, растяжение ε и дисторсия σ обращаются в нуль. Это означает, что при бесконечном удалении от системы произвольных заряженных источников электромагнитное и гравитационное поля являются полями плоских волн с общими конгруэнциями геодезических лучей.

ГЛАВА 12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

1. Хронометрические инварианты

Предыдущие главы в основном были посвящены исследованию полей тяготения с точки зрения общековариантных критериев существования гравитационных волн. Поле тяготения, удовлетворяющее общековариантному волновому критерию, носит волновой характер безотносительно к выбору координатной системы. Представляет, однако, интерес, отказавшись от требования общей ковариантности, сформулировать критерий *гравитационно-инерциальных волн*, ковариантный лишь относительно преобразований, связывающих трехмерные координатные сетки, в которых точки избранного тела отсчета покоятся. Такой критерий должен быть, кроме того, инвариантен относительно преобразований, сохраняющих линии координатного времени x^0, поскольку они являются мировыми линиями тела отсчета. Иными словами, этот критерий отражает выбор системы отсчета наблюдателей, поэтому выполнение его можно считать признаком реальности волн при заданном выборе тела отсчета; переходом же к другому телу отсчета такие волны, вообще говоря, могут быть устранены вследствие зависимости инерциальных свойств от состояния движения наблюдателей.

Итак, рассмотрим преобразования вида

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0 (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{12.1}$$

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i (x^1, x^2, x^3), \tag{12.2}$$

обладающие свойством $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0$. Очевидно, преобразования