где A_σ — вектор, ортогональный вектору l_λ. Из формул (11.45) автоматически следует, что для конгруэнции геодезических, определяемой вектором l^α, вращение ω, растяжение ε и дисторсия σ обращаются в нуль. Это означает, что при бесконечном удалении от системы произвольных заряженных источников электромагнитное и гравитационное поля являются полями плоских волн с общими конгруэнциями геодезических лучей.

ГЛАВА 12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

1. Хронометрические инварианты

Предыдущие главы в основном были посвящены исследованию полей тяготения с точки зрения общековариантных критериев существования гравитационных волн. Поле тяготения, удовлетворяющее общековариантному волновому критерию, носит волновой характер безотносительно к выбору координатной системы. Представляет, однако, интерес, отказавшись от требования общей ковариантности, сформулировать критерий *гравитационно-инерциальных волн*, ковариантный лишь относительно преобразований, связывающих трехмерные координатные сетки, в которых точки избранного тела отсчета покоятся. Такой критерий должен быть, кроме того, инвариантен относительно преобразований, сохраняющих линии координатного времени x^0, поскольку они являются мировыми линиями тела отсчета. Иными словами, этот критерий отражает выбор системы отсчета наблюдателей, поэтому выполнение его можно считать признаком реальности волн при заданном выборе тела отсчета; переходом же к другому телу отсчета такие волны, вообще говоря, могут быть устранены вследствие зависимости инерциальных свойств от состояния движения наблюдателей.

Итак, рассмотрим преобразования вида

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0 (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{12.1}$$

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i (x^1, x^2, x^3), \tag{12.2}$$

обладающие свойством $\dfrac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0$. Очевидно, преобразования

(12.1)— (12.2), где x^0 — временноподобная координата, есть наиболее общие преобразования, связывающие системы координат, покоящиеся относительно заданного тела отсчета.

При формулировке критерия ограничимся инвариантностью по отношению к преобразованиям (12.1), т. е. хронометрической инвариантностью, и ковариантностью по отношению к преобразованиям (12.2), т. е. пространственной ковариантностью. Таким образом, при задании тела отсчета свобода координатных преобразований ограничена хронометрической инвариантностью (12.1) и пространственной ковариантностью (12.2). Преобразования (12.1)—(12.2) послужили Зельманову основой, на которой был построен развитый им формализм хронометрических инвариантов [204—206].

Хронометрические инварианты, т. е. трехмерные физические величины, инвариантные относительно преобразований (12.1), можно рассматривать как наблюдаемые в общей теории относительности, т. е. величины, непосредственно связанные с физическими измерениями. Поэтому хронометрически инвариантный подход к гравитационно-инерциальным волнам представляет тем больший интерес, что определяемые таким образом волны можно рассматривать как объект непосредственного физического измерения.

Следуя Зельманову [204, 205], введем хронометрически инвариантные операторы дифференцирования, обозначая их, в отличие от обычных, звездочками:

$$^*\partial = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,\partial_0, \qquad ^*\partial_i = \partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\,\partial_0. \tag{12.3}$$

Введем также хронометрически инвариантный пространственный метрический тензор

$$b_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}}, \; b^{ik} = -g^{ik}, \; b = \det\|b_{ik}\|. \tag{12.4}$$

Для хронометрически инвариантных *вектора гравитационно-инерциальной силы* F_i *и тензора* A_{ik} *угловой скорости абсолютного вращения системы отсчета* Σ относительно локально сопутствующей геодезической системы Σ_0

имеем выражения [206]:

$$F^j = \frac{b^{ij}}{W}({}^*\partial_i W - {}^*\partial V_i), \tag{12.5}$$

$$A_{ik} = {}^*\partial_{[i} V_{k]} + F_{[i} V_{k]}, \tag{12.6}$$

где W и V_i — соответственно *скалярный* и *векторный потенциалы гравитационно-инерциального поля*:

$$W = (1 - \sqrt{g_{00}}), \qquad V_i = -g_{0i}/\sqrt{g_{00}}.$$

Хронометрически инвариантный *тензор* D_{ik} *скоростей деформаций* трехмерного пространства отсчета системы Σ относительно локально сопутствующей системы Σ_0 определяется выражениями [205]:

$$D_{ik} = \frac{1}{2}{}^*\partial b_{ik}, \;\; D^{ik} = -\frac{1}{2}{}^*\partial b^{ik}, \;\; D = {}^*\partial \ln \sqrt{b}. \tag{12.7}$$

Здесь $D = D_l^l$ — скорость относительного объемного расширения элемента пространства.

Определим также хронометрически инвариантные аналоги символов Кристоффеля и операцию хронометрически инвариантного трехмерно-ковариантного дифференцирования [205]:

$$\Delta_{ij}^l = \frac{1}{2} b^{kl}({}^*\partial_i b_{jk} + {}^*\partial_j b_{ik} - {}^*\partial_k b_{ij}), \tag{12.8}$$

$${}^*\nabla_i Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} = {}^*\partial_i Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} - \Delta_{ij}^l Q_{l\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} + \ldots + \Delta_{il}^k Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot l}, \tag{12.9}$$

причем

$${}^*\nabla_i b_{jk} = 0, \;\; {}^*\nabla_i b_j^k = 0, \;\; {}^*\nabla_i b^{jk} = 0.$$

В рамках формализма хронометрических инвариантов можно, кроме динамической величины F_i, кинематической — A_{ik} и статической — D_{ik}, ввести четвертую, геометрическую характеристику сопутствующего трехмерного пространства, именно, пространственный тензор кривизны K_{lkij}:

$$K_{kilj} = \frac{1}{2}(H_{ki[lj]} + H_{[ki]lj}), \tag{12.10}$$

где

$$H_{kil\cdot}^{\cdot\cdot\cdot j} = {}^*\partial_k \Delta_{il}^j - {}^*\partial_i \Delta_{kl}^j + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m \Delta_{im}^j, \tag{12.11}$$

причем

$$K_{lkij} = -K_{klij} = -K_{lkji} = K_{ijlk}. \qquad (12.12)$$

Как показал Зельманов, двадцать существенных компонент четырехмерного тензора Римана $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ могут быть собраны в трех хронометрически инвариантных тензорах, выражающихся через F_i, A_{ik}, D_{ik} и K_{iklj}. Действительно, введем следующие трехмерные тензоры [91]:

$$X^{ij} = -\frac{R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i \cdot j}}{g_{00}}, \quad Y^{ijk} = -\frac{R_{0\cdot\cdot\cdot}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad Z^{iklj} = R^{iklj}. \qquad (12.13)$$

Легко видеть, что тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} являются хронометрическими инвариантами. Действительно, пусть $Q_{00\dots 0}^{ik\dots p}$ — компоненты мирового (четырехмерного) тензора ранга n, все верхние индексы в которых отличны от нуля, а все нижние (числом m) — нули. Тогда, совершая преобразование (12.1), можно убедиться, что величины

$$T^{ik\dots p} = \frac{Q_{00\dots 0}^{ik\dots p}}{(g_{00})^{m/2}} \qquad (12.14)$$

образуют хронометрически инвариантный трехмерный тензор ранга $n - m$. Отметим попутно, что формула (12.14) может служить алгоритмом построения хронометрических инвариантов из компонент вида $Q_{00\dots 0}^{ik\dots p}$ мировых тензоров. Из определений (12.13) очевидно, что тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} построены именно по этому правилу, а потому удовлетворяют условию хронометрической инвариантности.

Выражая компоненты мирового тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через хронометрически инвариантные величины (12.5) — (12.7), (12.10), можно получить формулы Зельманова, устанавливающие связь тензоров (12.13) с этими величинами:

$$X_{ij} = {}^*\partial D_{ij} - (D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l})(D_{jl} + A_{jl}) + {}^*\nabla_{(i} F_{j)} - \frac{1}{2} F_i F_j, \qquad (12.15)$$

$$Y_{ijk} = {}^*\nabla_j (A_{ik} + D_{ik}) - {}^*\nabla_i (A_{jk} + D_{jk}) - 2A_{ij} F_k, \qquad (12.16)$$

$$Z_{iklj} = 2(D_{i[k} D_{l]j} - A_{i[k} A_{l]j} + A_{ij} A_{kl}) - K_{iklj}. \qquad (12.17)$$

При этом

$$X^k_k = \frac{R_{00}}{g_{00}}, \quad Y^{il\cdot}_{\cdot\cdot l} = \frac{R^i_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{ijl\cdot}_{\cdot\cdot\cdot l} + X^{ij} = -R^{ij}, \tag{12.18}$$

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad Y_{ijk} = -Y_{jik}, \quad Y_{(ijk)} = 0, \tag{12.19}$$

а тензор Z_{klij} обладает свойствами симметрии и антисимметрии (12.12) тензора K_{klij}. Мы видим, что двадцать существенных компонент тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражаются через шесть существенных компонент тензора X_{ij}, восемь существенных компонент тензора Y_{ijk} и шесть существенных компонент тензора Z_{klij}.

2. Хронометрически инвариантное определение гравитационно-инерциальных волн

Итак, мировой тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ распадается на три хронометрически инвариантных трехмерных тензора (12.13), выражающихся, в свою очередь, через гравитационно-инерциальные физические характеристики трехмерного пространства, сопутствующего выбранному телу отсчета, (12.5)— (12.7) и (12.10). Определение гравитационно-инерциальных волн мы свяжем с четырьмя гравитационно-инерциальными характеристиками (12.5)— (12.7), (12.10), а также с величинами (12.13), выражающимися через них по формулам (12.15) — (12.17).

Хронометрически инвариантное определение оператора Даламбера в общей теории относительности, реализующее идею Зельманова, было сформулировано в работе [94].

Хронометрически инвариантный критерий существования гравитационно-инерциальных волн состоит в требовании, чтобы трехмерные хронометрически инвариантные величины: вектор F_i, тензоры D_{ik}, A_{ik}, K_{klij} и составленные из них скаляры, а также выражающиеся через них хронометрически инвариантные тензоры X_{ij}, Y_{ijk}, Z_{klij} удовлетворяли уравнениям вида

$$^*\Box P = Q. \tag{12.20}$$

Здесь введены обозначения:

$$^*\Box = {}^*\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\,{}^*\partial^*\partial, \quad {}^*\nabla^2 \equiv b^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k, \tag{12.21}$$

так что $^*\Box$ есть хронометрически инвариантный пространственно-ковариантный волновой оператор Даламбера, a —

скалярная функция координат. Предполагается, что в Q не входят явно вторые производные от искомой функции P. Последнюю мы будем называть по традиции волновой функцией в смысле уравнения (12.20). Роль волновой функции P будут играть различные хронометрически инвариантные величины той или иной трехмерно-тензорной природы. Исследование хронометрически инвариантного волнового критерия сводится к анализу его выполнимости для различных хронометрически инвариантных характеристик системы отсчета и гравитационного поля по отношению к ней. В соответствии с этим следует различать гравитационно-инерциальные волны сил F_i, деформаций D_{ik}, кривизны K_{klij} и т. д.

В работе [94] этот критерий был применен для анализа ряда известных решений уравнений Эйнштейна в пустоте. Было показано, что он выполняется для всех исследованных решений типа N по Петрову: решений Переса [160], Такено [153, 163], Петрова [65] и др., но не удовлетворяется для решений типа «цилиндрических волн» Эйнштейна — Розена [187] и Компанейца [189], не принадлежащих к типу N. Заметим, что последние два решения, принадлежащие к типу I по Петрову, не удовлетворяют также ни одному из рассмотренных нами в предыдущих главах общековариантных критериев гравитационных волн (Лихнеровича, Беля, Пирани, Зельманова и др.).

Рассмотрим волновые уравнения вида (12.20) для полей тяготения, отвечающих некоторым точным решениям уравнений Эйнштейна в пустоте (2.2).

Решение Переса (9.30) — (9.31) принадлежит к типу N по Петрову. Для упрощения выкладок наложим на функцию f в этом решении дополнительное условие [1]) $f_{,1} = f_{,2} = 0$, в силу которого единственное полевое уравнение (9.31) будет удовлетворяться тождественно.

---

[1]) Фактически это условие означает, что мы ограничиваемся плоским пространством — временем, так как отличные от нуля существенные компоненты тензора Римана для метрики (9.30) имеют вид

$$R_{3113} = R_{3110} = R_{0110} = R_{0110} = f_{,11}, \quad R_{3223} = R_{3220} = R_{0220} = f_{,22},$$
$$R_{3123} = R_{3120} = R_{0123} = R_{0120} = f_{,12}.$$

Наш случай, следовательно, будет отвечать только инерциальным волнам. Более общий случай гравитационно-инерциальных волн в пространстве—времени с $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ мы рассмотрим ниже на примере других точных решений уравнений Эйнштейна.

Используя формулы (12.3), имеем для произвольной функции P аргумента $(x^0 + x^3)$.

$$^*\partial P = \frac{1}{\sqrt{1-2f}} P_{,3}, \quad ^*P_{,3} = \frac{1}{1-2f} P_{,3},$$

$$^*\partial^*\partial P = \frac{1}{(1-2f)^2} [P_{,00}(1-2f) + f_{,3}P_{,3}],$$

$$^*\partial_3{}^*\partial_3 P = \frac{1}{(1-2f)^3} [P_{,33}(1-2f) + 2f_{,3}P_{,3}].$$

Выражая отсюда $P_{,00}$ через $^*\partial^*\partial P$, а $P_{,33}$ — через $^*\partial_3{}^*\partial_3 P$, и замечая, что

$$^*\nabla^2 P \equiv b^{ik}(^*\partial_i^*\partial_k P - \Delta_{ik}^{j}{}^*\partial_j P),$$

приводим в данной системе отсчета обычное волновое уравнение для функции $P(x^0 + x^3)$

$$P_{,33} - P_{,00} = 0$$

к искомому виду

$$(^*\nabla^2 - {}^*\partial^*\partial)\, P = 0. \tag{12.22}$$

Так как трехмерные скаляры

$$F_i F^i = \frac{(f_{,3})^2}{(1-2f)^3}, \quad D = \frac{f_{,3}}{(1-2f)^{3/2}}$$

для этой метрики также зависят только от аргумента $x^0 + x^3$ ($A_{ik} = 0$ при $f_{,1} = f_{,2} = 0$), то они удовлетворяют уравнению (12.22), т. е. являются решениями хронометрически инвариантного уравнения (12.20) при $Q = 0$, $a = 1$.

Получим теперь в данной системе отсчета волновые уравнения для вектора гравитационно-инерциальной силы F^i и тензора скоростей деформации D_{ik}. Поле вектора F_i имеет вид

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F = -\frac{f_{,3}}{(1-2f)^2};$$

вычисляя величину $^*\Box F_i$, найдем вид правой части уравнения (12.20) при условии, что в нее не входят производные выше первого порядка от F_i. Если такие производные появляются справа, то уравнение, очевидно, не является волновым; такой случай имеет место, например, для метрик Эйнштейна — Розена и Компанейца.

Результаты вычислений для метрики Переса приводят к следующим хронометрически инвариантным пространственно-ковариантным уравнениям:

$$^*\Box F^i = -3F^i({}^*\nabla_j F^j + \frac{1}{3} F_j F^j), \qquad (12.23)$$

$$^*\Box D_{ij} = -2D_{ij}(3^*\partial D + 2D_{kl}D^{kl}). \qquad (12.24)$$

Уравнения (12.23) — (12.24) есть, очевидно, хронометрически инвариантные уравнения волнового гравитационно-инерциального поля, причем нелинейности справа играют роль источников гравитационно-инерциальных возмущений.

Решение Такено (10.5) также принадлежит к типу N по Петрову. Вычислив для метрики (10.5) тензор угловой скорости абсолютного вращения (12.6), убедимся, что он обращается в нуль: $A_{ik} = 0$. Но, как показал Зельманов [206], это является необходимым и достаточным признаком того, что в той же области все g_{0i} можно обратить в нуль преобразованием (12.1). Полагая поэтому в дальнейшем $S = 0$ в метрике (10.5), найдем, что скаляры

$$F_i F^i = -\frac{P_{,3}}{4P^2},$$

$$D = -\frac{1}{2mP^{3/2}}(PM_{,3} + MP_{,3})$$

удовлетворяют хронометрически инвариантному волновому уравнению

$$^*\Box G = \frac{1}{2M} b^{ik}\, {}^*\nabla_i G\, {}^*\nabla_k M,$$

где G — любой из хронометрически инвариантных скаляров $F^i F_i$ и D_i^i.

Для вектора гравитационно-инерциальной силы волновое уравнение принимает вид

$$^*\Box F^i = F^i(-2F_j F^j + 3^*\partial D + 2D_{jl}D^{jl} - D^2) +$$
$$+ \frac{1}{2M} b^{ik}\, {}^*\nabla_k M (2F_j F^j - {}^*\partial D - D_{jl}D^{jl}),$$

откуда, в частности, следует, что источники волновых возмущений гравитационно-инерциального поля зависят от деформации системы отсчета.

Решение Петрова (9.15) рассматривалось в другой системе координат Бонди, Пирани и Робинсоном [143]; Синг [172] интерпретировал его на языке «объемных гравитационных волн». Мы запишем его в виде

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} + \alpha\, dx^{2\,2} + 2\beta\, dx^2 dx^3 + \gamma\, dx^{3\,2}, \qquad (12.25)$$

где α, β, γ — функции аргумента $x^0 + x^1$, связанные одним дифференциальным уравнением [65]. Для этого решения в системе отсчета (12.25) $F^i = 0$, $A_{ik} = 0$, а скаляр D имеет вид

$$D = \frac{1}{2}\,{}^*\partial \ln(\alpha\gamma - \beta^2)$$

и удовлетворяет скалярному волновому уравнению типа (12.20) при $a = 1$:

$${}^*\Box D = D\,(b^{ik}\,{}^*\nabla_i D^*\nabla_k D)^{1/2}.$$

Обратимся теперь к решениям типа T_1 по Петрову. Оказывается, что рассматриваемому волновому критерию, в отличие от других общековариантных критериев, могут удовлетворять и некоторые метрики типа T_1. Так, метрики

$$ds^2 = -\alpha^{-1} dx^{0\,2} + \alpha\, dx^{1\,2} + \gamma\, dx^{2\,2} + \gamma\,\mathrm{sh}^2 x^2\, dx^{3\,2},$$

$$ds^2 = -\alpha^{-1} dx^{0\,2} + \alpha\, dx^{1\,2} + \gamma\, dx^{2\,2} + \gamma\,\mathrm{ch}^2 x^2\, dx^{3\,2},$$

где α и γ — функции аргумента $x^0 + x^1$ ($\alpha < 0$, $\gamma < 0$), удовлетворяющие некоторой системе дифференциальных уравнений [94], определяют поля тяготения типа D [207]. Трехмерное пространство системы отсчета является голономным ($A_{ik} = 0$), и хронометрически инвариантные скаляры D и $F_i F^i$ удовлетворяют волновому уравнению (12.20) при $a = \alpha$:

$${}^*\nabla^2 G - \frac{1}{\alpha^2}\,{}^*\partial^*\partial G = b^{ik}\,{}^*\nabla_i G^*\nabla_k \ln\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Специального рассмотрения заслуживает решение Эйнштейна — Розена [187], принадлежащее к типу I по Петрову:

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\alpha)}\,(dx^{0\,2} - dx^{1\,2}) - x^{1\,2} e^{-2\alpha}\, dx^{2\,2} - e^{2\alpha}\, dx^{3\,2}, \qquad (12.26)$$

где γ и α — функции x^1 и x^0, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\alpha_{,11} + \frac{1}{x^1}\alpha_{,1} - \alpha_{,00} = 0, \qquad (12.27)$$

$$\gamma_{,1} = x^1 [(\alpha_{,1})^2 + (\alpha_{,2})^2], \quad \gamma_0 = 2x^1\alpha_{,1}\alpha_{,0}. \qquad (12.28)$$

Можно показать [94], что, хотя уравнение «цилиндрических волн» (12.27) и допускает хронометрически инвариантную запись (12.20) при $a = 1$,

$$^*\Box\, \alpha = b^{ik}\, {}^*\nabla_i\alpha {}^*\nabla_k (\alpha - \gamma) + {}^*\partial\alpha {}^*\partial\gamma - ({}^*\partial\alpha)^2,$$

однако ни этому, ни аналогичному уравнению типа (12.20) с другой правой частью и при другом a не удовлетворяют ни хронометрически инвариантные скаляры D и F_iF^i $(A_{ik} = 0)$, ни какие-либо их скалярные функции.

Аналогичный результат имеет место для метрики Компанейца [189], обобщающей метрику Эйнштейна — Розена:

$$ds^2 = \alpha\, dx^{0\,2} - \alpha\, dx^{1\,2} - \gamma\, dx^{2\,2} - 2\beta\, dx^2 dx^3 - \delta\, dx^{3\,2}, \quad (12.29)$$

где α, β, γ, δ — функции x^1 и x^0. Из уравнений поля можно получить два уравнения «взаимодействующих цилиндрических волн»:

$$[x^1 (PQ - 1)^{-1/2} P_{,1}]_{,1} - x^1 [(PQ - 1)^{-1/2} P_{,0}]_{,0} = 0, \quad (12.30)$$

$$[x^1 (PQ - 1)^{-1/2} Q_{,1}]_{,1} - x^1 [(PQ - 1)^{-1/2} Q_{,0}]_{,0} = 0, \quad (12.31)$$

где использованы обозначения

$$P = \gamma (\gamma\delta - x^{1\,2})^{-1/2}, \quad Q = \delta (\gamma\delta - x^{1\,2})^{-1/2}.$$

Как и в случае метрики Эйнштейна — Розена, система уравнений (12.30) — (12.31) допускает хронометрически инвариантную пространственно-ковариантную запись (12.20) при $a = 1$:

$$^*\Box\, \gamma = \frac{1}{8\alpha\beta^2\lambda^2} [(\beta^2 - \lambda)\pi + \omega\gamma^2], \qquad (12.32)$$

$$^*\Box\, \delta = \frac{1}{8\alpha\beta^2\lambda^2} [(\beta^2 - \lambda)\omega + \pi\delta^2], \qquad (12.33)$$

где $\lambda = \gamma\delta - \beta^2$, а π и ω — некоторые функции от α, β, γ, δ и их первых производных. Однако уравнениям типа

(12.20) также не удовлетворяют ни D, ни $F_i F^i$, ни их скалярные функции.

В заключение этого параграфа обсудим вопрос об общей связи хронометрически инвариантного критерия (12.20) с общековариантным критерием Зельманова (гл. 7), исследованный в работе [165]. Записывая систему из 20 уравнений

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\,\rho\sigma} = 0$$

в хронометрически инвариантном пространственно-ковариантном виде, после довольно продолжительных выкладок можно прийти к трем системам уравнений:

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial{}^*\partial)\, X^{ij} = \underset{(1)}{A^{ij}} \quad \text{(шесть уравнений)}, \qquad (12.34)$$

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial{}^*\partial)\, Y^{ijk} = \underset{(2)}{A^{ijk}} \quad \text{(восемь уравнений)}, \qquad (12.35)$$

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial{}^*\partial)\, Z^{klij} = \underset{(3)}{A^{klij}} \quad \text{(шесть уравнений)}, \qquad (12.36)$$

где правые части $\underset{(1)}{A^{ij}}, \underset{(2)}{A^{ijk}}, \underset{(3)}{A^{klij}}$ представляют собой хронометрически инвариантные пространственные тензоры соответственно второго, третьего и четвертого ранга и не содержат производных выше первого порядка от «волновых функций» X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{klij}. В развернутом виде эти уравнения приведены в Приложении II.

Таким образом, *любое пространство — время* V_4, *удовлетворяющее общековариантному критерию гравитационных волн Зельманова, удовлетворяет также хронометрически инвариантному критерию гравитационно-инерциальных волн.* При этом роль волновых функций в соответствующих волновых уравнениях типа (12.20) играют хронометрически инвариантные тензоры (12.13), т. е. величины X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{klij}, представляющие в данной системе отсчета тензор Римана.

3. Физические условия существования гравитационно-инерциальных волн

Поскольку уравнения (12.20) не являются общековариантными, то волны, описываемые этими уравнениями, тесно связаны с физическими характеристиками выбранной системы отсчета, именно, с хронометрически инвариантными величинами F^i, A_{ik} и D_{ik} (12.5) — (12.7).

Выясним, какова роль этих физических величин в волновых уравнениях типа (12.20) и как они влияют на существование гравитационно-инерциальных волн. Ясно, например, что выбор системы отсчета, определяемый видом величин F_i, A_{ik} и D_{ik}, может привести к ограничениям, при которых тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{klij} станут стационарными, т. е. не зависящими от времени. Тогда хронометрически инвариантный даламбертиан (12.21) в уравнениях (12.20) вырождается в лапласиан, что свидетельствует об отсутствии физических гравитационно-инерциальных волн в данной системе отсчета.

Кроме того, входящий в выражение $^*\Box$ (12.21) трехмерный лапласиан $^*\nabla^2$ в выбранной системе отсчета может обратить «волновую функцию» в нуль. Этот случай может реализоваться, например, всегда, когда функции P в (12.20) однородны: $^*\nabla_i P = 0$.

Таким образом, обе упомянутые ситуации (стационарность и однородность волновой функции) можно рассматривать как достаточные (но, вообще говоря, не необходимые) условия отсутствия гравитационно-инерциальных волн в заданной системе отсчета.

Представив в хронометрически инвариантной записи тождества (7.8), нетрудно убедиться [208], что в пространствах Эйнштейна (3.7) хронометрически инвариантные представители тензора Римана X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} всегда удовлетворяют волновому уравнению (12.20) при $a = 1$ и некотором определенном выборе правой части Q. Следовательно, вопрос о существовании гравитационно-инерциальных волн для величин X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} в пространствах Эйнштейна сводится лишь к исследованию нетривиальности (в указанном выше смысле) левых частей этих волновых уравнений.

В работе [208] было проведено исследование (не только для пространств Эйнштейна, но и в общем случае) достаточных условий, при которых система отсчета не допускает гравитационно-инерциальных волн, т. е. левая часть уравнения (12.20) неизбежно вырождается. В этой работе для всех хронометрически инвариантных величин, играющих роль волновых функций, дана полная классификация систем отсчета, не допускающих гравитационно-инерциальных волн либо в силу стационарности волновой функции, либо в силу ее однородности.

Мы изложим результаты этого исследования для случая произвольного поля тяготения в среде с тензором энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$. В этой связи введем, следуя Зельманову [205], понятия хронометрически инвариантных плотности, давления и тензора натяжений среды:

$$\rho = T_{00}/g_{00}, \quad J^i = T^i_0/\sqrt{g_{00}}, \quad U^{ij} = T^{ij}. \tag{12.37}$$

Пусть роль волновых функций играют хронометрически инвариантные представители мирового тензора Римана X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj}. Исследуем волновое уравнение (12.20) для этих функций в системах отсчета, в которых:

а) обращаются в нуль все хронометрически инвариантные механические характеристики системы отсчета (12.5)—(12.7),

б) отлична от нуля одна из них,

в) отличны от нуля две из них,

г) отличны от нуля все три хронометрически инвариантные механические характеристики системы отсчета: $F^i \neq 0$, $A_{ik} \neq 0$, $D_{ik} \neq 0$, и выясним, какие системы отсчета не допускают гравитационно-инерциальных волн в силу однородности либо стационарности волновых функций.

Пусть выполняются условия однородности [1]):

$$\begin{gathered} {}^*\nabla_j F_i = 0, \quad {}^*\nabla_j A_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j D_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j K_{ik} = 0, \\ {}^*\partial_i \rho = 0, \quad {}^*\nabla_j U_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j J^i = 0. \end{gathered} \tag{12.38}$$

Можно показать, что в этом случае все волновые функции являются однородными, т. е.

$$^*\Box P = -{}^*\partial^*\partial P$$

для любого из тензоров (12.13). Таким образом, при выполнении условий однородности (12.38) гравитационно-инерциальные волны отсутствуют.

Предполагая теперь пространство неоднородным, исследуем другое достаточное условие отсутствия гравитационно-инерциальных волн, именно, стационарность волновых функций. Начнем со случая (а), когда

$$F^i = 0, \; A_{ik} = 0, \quad D_{ik} = 0, \tag{12.39}$$

[1]) Условия (12.38), впервые отмеченные Зельмановым, отличаются от условий однородности, приведенных им в [205], тем, что равенства $\dfrac{^*\partial p}{\partial x^i} = 0$, $^*\nabla_j \beta_{ik} = 0$ заменены в (12.38) равенством $^*\nabla_j U_{ik} = 0$, а равенство $^*\nabla_j q_i = 0$ — равенством $^*\nabla_j J_i = 0$.

т. е. выбранная система отсчета свободно падает, не вращается и не деформируется [1]). Величины (12.13) в этом случае приобретают вид

$$X^{ij}=0, \quad Y^{ijk}=0, \quad Z^{iklj}=-K^{iklj}. \tag{12.40}$$

Оказывается, что третье условие (12.39) приводит к стационарности трехмерного тензора кривизны K^{iklj}, и, следовательно, в такой системе отсчета гравитационно-инерциальные волны отсутствуют.

Условия (12.39), определяющие систему отсчета, позволяют однозначно восстановить общий вид метрики пространства — времени V_4. Действительно, совместное выполнение первого и второго условий (12.39) означает, что в данной системе отсчета можно параметризовать линии времени x^0 так, чтобы одновременно было [205]

$$g_{00}=1, \quad g_{0i}=0. \tag{12.41}$$

Третье условие (12.39) гарантирует тогда стационарность трехмерного метрического тензора (12.4). Согласно результату Коттона (см. [65], стр. 389), в этом случае трехмерную метрику b_{ik} можно преобразовать к диагональному виду. Таким образом, для того чтобы существовала система отсчета, удовлетворяющая условиям (12.39), необходимо и достаточно, чтобы данное V_4 было приводимым пространством специального типа:

$$\begin{gathered} ds^2=dx^{0\,2}+g_{11}dx^{1\,2}+g_{22}dx^{2\,2}+g_{33}dx^{3\,2}, \\ g_{ii}=g_{ii}(x^1, x^2, x^3). \end{gathered} \tag{12.42}$$

Можно доказать, что пространство Эйнштейна (3.7) с метрикой типа (12.42) всегда является плоским (см. [65], стр. 390).

Рассмотрим теперь случай, когда второе из условий (12.39) не выполняется:

$$F^i=0, \quad A_{ik}\neq 0, \quad D_{ik}=0, \tag{12.43}$$

т. е. система отсчета вращается, при этом свободно падая и не деформируясь. Первое условие (12.43) позволяет выбрать

[1]) Здесь и в дальнейшем, говоря о свободном падении, вращении и деформации системы отсчета, мы имеем в виду соответствующие движения трехмерного пространства данной системы отсчета относительно локально сопутствующей ей геодезической системы.

параметризацию линий времени x^0 так, чтобы выполнялись условия [205]:

$$g_{00} = 1, \quad {}^*\partial g_{0i} = 0.$$

Можно показать, что в системе отсчета, обладающей свойствами (12.43), все g_{ik} также стационарны. Отсюда вытекает, что метрика $g_{\alpha\beta}$ пространства — времени V_4 является стационарной, а следовательно, стационарны и величины (12.13). Таким образом, система отсчета типа (12.43) не допускает гравитационно-инерциальных волн. Примером метрики, отвечающей этому случаю, может служить известная метрика Гёделя [209].

Рассмотрим случай, когда нарушается первое из условий (12.39):

$$F^i \neq 0, \; A_{ik} = 0, \; D_{ik} = 0, \tag{12.44}$$

т. е. система отсчета ускоренно движется, не вращаясь и не деформируясь. Тогда метрику пространства — времени можно привести к виду

$$\begin{gathered} ds^2 = g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^{0\,2} + g_{11} dx^{1\,2} + g_{22} dx^{2\,2} + g_{33}\, dx^{3\,2}, \\ g_{ii} = g_{ii}(x^1, x^2, x^3). \end{gathered} \tag{12.45}$$

Величины (12.13) в этой системе отсчета принимают вид

$$X^{ij} = \frac{1}{2}({}^*\nabla^i F^j + {}^*\nabla^j F^i) - F^i F^j, \tag{12.46}$$

$$Y^{ijk} = 0, \tag{12.47}$$

$$Z^{iklj} = -K^{iklj}. \tag{12.48}$$

В силу третьего условия (12.44) Z^{iklj} оказывается стационарным, так что вопрос сводится к исследованию только волновых свойств X^{ij}.

Используя хронометрически инвариантную форму уравнений поля, можно записать X^{ij} в виде

$$X^{ij} = (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - U b^{ij}), \tag{12.49}$$

где Λ — космологическая постоянная.

Отсюда вытекает, что в пустоте волны X^{ij} невозможны в силу стационарности этой «волновой функции», хотя четырехмерная метрика $g_{\alpha\beta}$ в этом случае, вообще говоря, нестационарна.

В общем случае ($T_{\alpha\beta} \neq 0$) из уравнений поля и законов сохранения следует, что в рассматриваемой системе отсчета плотность массы ρ не зависит от времени. Но тензор натяжений U^{ij}, вообще говоря, нестационарен. Таким образом, нестационарность X^{ij} в этом случае обусловлена нестационарностью тензора натяжений U^{ij}, так что вопрос об отсутствии волн в среде требует более детального анализа при каждом выборе $T_{\alpha\beta}$ в уравнениях поля.

Потребуем сначала, чтобы данная система отсчета сопутствовала среде. В этом случае тензор натяжений можно представить в виде

$$U^{ij} = pb^{ij} - \beta^{ij} = p_{(0)}b^{ij} - \alpha^{ij}, \tag{12.50}$$

где β^{ij} — первая вязкость, проявляющаяся при анизотропной деформации, α^{ij} — вторая вязкость, проявляющаяся при изотропной деформации, p — истинное давление, $p_{(0)}$ — равновесное давление, определяемое из уравнения состояния. Так как в сопутствующей системе отсчета при отсутствии деформации вязкость среды себя не проявляет, то $U^{ij} = pb^{ij}$ и, следовательно, $p = p_{(0)}$.

Если среда бароклинна, т. е. если $p_0 = p_0(\rho, \tau)$, где τ — абсолютная температура, то

$${}^*\partial X^{ij} = -\frac{\lambda}{2}\frac{\partial p}{\partial \tau}\,{}^*\partial\tau\, b^{ij}, \tag{12.51}$$

так что X^{ij}, вообще говоря, нестационарны. В случае баротропной среды, для которой $p_{(0)} = p_{(0)}(\rho)$, рассматриваемая система отсчета не допускает гравитационно-инерциальных волн в силу стационарности тензора натяжений. Покажем, что в случае баротропной среды стационарен также и четырехмерный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$.

При сделанных нами предположениях уравнения релятивистских законов сохранения принимают вид

$${}^*\partial\rho = 0, \tag{12.52}$$

$$\frac{1}{\rho + p}\partial_i p = -\partial_i \ln\sqrt{g_{00}}. \tag{12.53}$$

Здесь уравнение (12.53) представляет собой хронометрически инвариантный аналог уравнения равновесия в гидродинамике, обобщенного на случай гравитационного поля [210]. Совместно уравнения (12.52) — (12.53) приводят к следующему выражению для g_{00}:

$$g_{00} = \exp 2 [T(x^0) + R(x^i)], \tag{12.54}$$

где R и T — произвольные функции своих аргументов С помощью преобразования координат

$$d\tilde{x}^0 = [\exp T(x^0)]\, dx^0, \quad d\tilde{x}^i \equiv dx^i \tag{12.55}$$

метрика приводится к стационарной форме

$$ds^2 = \exp [2\tilde{R}(\tilde{x}^i)]\, d\tilde{x}^{0\,2} + \tilde{g}_{11} d\tilde{x}^{1\,2} + \tilde{g}_{22} d\tilde{x}^{2\,2} + \tilde{g}_{33} d\tilde{x}^{3\,2}, \tag{12.56}$$

$$\tilde{g}_{ii} = \tilde{g}_{ii}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3).$$

(Примером такой системы отсчета может служить система, в которой обычно записывается метрика Шварцшильда.) Основной вывод из рассмотренного случая состоит в том, что если среда баротропна, то система отсчета, сопутствующая ей, не допускает существования гравитационно-инерциальных волн.

Мы рассмотрели случай произвольного тензора энергии — импульса при единственном предположении, что система отсчета сопутствует среде. Представляют, однако, интерес некоторые варианты тензора энергии — импульса, для которых это предположение не выполняется. Первым примером такого рода является тензор энергии — импульса идеальной жидкости:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}.$$

Из уравнений поля следует, что соответствующая система отсчета сопутствует массе, т. е. $J^i = 0$. Опираясь на хронометрически инвариантную запись уравнений поля, можно показать, что в этом случае система отсчета должна сопутствовать и среде. Это означает, что, как и в предыдущем случае, в идеальной жидкости гравитационно-инерциальные волны не могут существовать, если среда баротропна.

Рассмотрим другой пример — тензор энергии — импульса диссипативных процессов [1]):

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}. \tag{12.57}$$

---

[1]) Последующие рассуждения справедливы в предположении, что диссипативные процессы (вязкость и теплопроводность) не являются слишком сильными [210].

В системе отсчета, соответствующей записи (12.57), вязкость не проявляется в силу третьего условия (12.44), а поток тепла отсутствует потому, что система отсчета сопутствует массе. Таким образом, в этой системе отсчета $T_{\alpha\beta}$ для среды с диссипативными процессами сводится к рассмотренному выше $T_{\alpha\beta}$ для идеальной жидкости.

Третий пример, который мы рассмотрим, — это тензор энергии — импульса электромагнитного поля (2.30). Пусть

$$^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

— тензор, дуальный тензору Максвелла. Введем обозначения:

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv d^i, \qquad \frac{{}^*F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv h^i, \tag{12.58}$$

где d^i и h^i — хронометрически инвариантные векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно. Можно показать [211], что эти векторы связаны с хронометрически инвариантными представителями тензора энергии — импульса электромагнитного поля следующими соотношениями:

$$\rho = \frac{1}{2}(h^2 + d^2), \qquad h^2 = b_{mn}h^m h^n, \qquad d^2 = b_{mn}d^m d^n, \tag{12.59}$$

$$J^i = \eta^{imn}d_m h_n, \tag{12.60}$$

$$U^{ij} = \rho b^{ij} - (h^i h^j + d^i d^j). \tag{12.61}$$

Для того чтобы электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ было изотропным, т. е. чтобы оно удовлетворяло соотношениям

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \qquad F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} = 0,$$

или, в хронометрически инвариантной форме:

$$h = d, \qquad h^m d_m = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условия [211]

$$J = \rho \qquad (J^2 = b^{ik}J_i J_k). \tag{12.62}$$

Из (12.62) следует, что сопутствующая «массе» система отсчета, в которой $J^i = 0$, не может быть осуществлена в изотропном электромагнитном поле; поэтому в дальнейшем мы будем считать электромагнитное поле неизотропным.

Тензор X^{ik} для электромагнитного поля принимает вид

$$X^{ik} = (K^{ik} + \Lambda b^{ik}) + \lambda U^{ik}, \tag{12.63}$$

откуда следует, что

$$^*\partial X^{ik} = -\lambda^*\partial (h^i h^k + d^i d^k). \tag{12.64}$$

Выясним, для каких неизотропных электромагнитных полей тензор X^{ik} стационарен. Уравнения Максвелла в хронометрически инвариантной форме имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^{imn}(^*\nabla_m - F_m)(h_n \sqrt{b}) = {}^*\partial (d^i \sqrt{b}),\\ \varepsilon^{imn}(^*\nabla_m - F_m)(d_n \sqrt{b}) = -{}^*\partial (h^i \sqrt{b}),\\ ^*\nabla_m d^m = 2h^m\Omega_m,\\ ^*\nabla_m h^m = 2d^m\Omega_m.\end{gathered} \tag{12.65}$$

Из условия $J^i=0$ следует коллинеарность векторов h_i и d_i:

$$d^i = \chi h^i. \tag{12.66}$$

Полагая $^*\partial d^i = {}^*\partial h^i = 0$ и учитывая (12.66), из уравнений (12.65) получаем:

$$^*\partial_m \chi h_n = {}^*\partial_n \chi h_m; \tag{12.67}$$

тогда

$$h_n = \sigma(x^i)\, {}^*\partial_n \chi, \qquad d_n = \chi(x^i)\, \sigma(x^j)\, {}^*\partial_n \chi. \tag{12.68}$$

Но всякий вектор l_i, пропорциональный градиенту, удовлетворяет уравнению вида

$$l_{[i}{}^*\nabla_j l_{k]} = 0. \tag{12.69}$$

Таким образом, гравитационно-инерциальные волны X^{ik} в неизотропном электромагнитном поле отсутствуют, если хронометрически инвариантные векторы напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют условию (12.69).

Наконец, рассмотрим случай, когда не выполнено третье из условий (12.39), т. е. когда система отсчета деформируется, свободно падая и не вращаясь; такая система называется полугеодезической (синхронной):

$$F^i = 0, \quad A_{ik} = 0, \quad D_{ik} \neq 0. \tag{12.70}$$

Трехмерные тензоры (12.13) в такой системе отсчета имеют, согласно (12.15) — (12.17), вид

$$X^{ij} = -DD^{ij} + D^i_k D^{jk} + (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \\ + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - Ub^{ij}), \tag{12.71}$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j D^{ik} - {}^*\nabla^i D^{jk}, \tag{12.72}$$

$$Z^{iklj} = D^{ik}D^{lj} - D^{il}D^{kj} - K^{iklj} \tag{12.73}$$

и, вообще говоря, нестационарны.

Перейдем теперь к случаю (в), когда не выполняются два из условий (12.39). Пусть система отсчета ускоренно движется и вращается, но не деформируется:

$$F^i \neq 0, \quad A_{ik} \neq 0, \quad D_{ik} = 0. \tag{12.74}$$

Тогда тензоры (12.13) приобретут следующий вид:

$$X^{ij} = 3A^{i\cdot}_{\cdot j}A^{kj} + (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - Ub^{ij}), \tag{12.75}$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j A^{ik} - {}^*\nabla^i A^{jk} + 2A^{ji}F^k, \tag{12.76}$$

$$Z^{iklj} = A^{ik}A^{lj} - A^{il}A^{kj} + 2A^{ij}A^{kl} - K^{iklj}. \tag{12.77}$$

Используя тождества

$${}^*\partial A_{ik} + {}^*\partial_{[i}F_{k]} = 0 \tag{12.78}$$

и принимая во внимание, что в недеформирующейся системе отсчета ${}^*\partial A_{ik} = {}^*\partial A^{ik}$, приходим на основании (12.75) к выводу, что нестационарность X^{ik} обусловлена вихревым характером поля F^i и нестационарностью хронометрически инвариантных представителей тензора энергии — импульса. Аналогично из (12.76) и (12.77) ясно, что нестационарность Y^{ijk} обусловлена вихревым характером и нестационарностью поля F^i, а нестационарность Z^{iklj} обусловлена только вихревым характером поля F^i. Таким образом, для случая вихревого поля (${}^*\nabla_{[k}F_{i]} \neq 0$) система отсчета типа (12.74) не исключает существования гравитационно-инерциальных волн всех трех хронометрически инвариантных представителей тензора Римана.

Напротив, если поле F^i является безвихревым, $^*\nabla_{[k}F_{i]} = 0$, то из (12.76) следует стационарность Z^{iklj}. Тензор Y^{ijk} при этом, вообще говоря, нестационарен, так как

$$^*\partial Y^{ijk} = 2A^{ji}\,{}^*\partial F^k \neq 0. \qquad (12.79)$$

Тензор X^{ik} может быть нестационарным только при $T_{\alpha\beta} \neq 0$. В этом последнем случае уравнения законов сохранения в системе отсчета (12.74) приводят к условиям: $J^i \neq 0$, $^*\partial\rho \neq 0$, в отличие от случая (12.39).

Условие $J^i \neq 0$ означает, что данная система отсчета может существовать не только в неизотропном, но и в изотропном электромагнитном поле. Пусть она сопутствует среде. Тогда в формуле (12.50) будет $U^{ik} = pb^{ik}$ и

$$^*\partial X^{ij} = \frac{\lambda}{2}\left({}^*\partial\rho - {}^*\partial p\right) b^{ij}. \qquad (12.80)$$

В этом случае функция X^{ij} нестационарна как в бароклинной, так и в баротропной среде, в отличие от третьего из рассмотренных случаев. Исключение составляет специальный случай, когда баротропная среда характеризуется уравнением состояния $p = \rho$ (среда со сверхвысокой плотностью, например, вблизи сингулярности); тогда $^*\partial X^{ij}$ обращается в нуль. Итак, система отсчета, характеризуемая ускорением и нестационарным вращением, не исключает существования гравитационно-инерциальных волн X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj}. Система отсчета, характеризуемая ускорением и стационарным вращением, не допускает существования волн X^{ij} (в пустоте и в среде, описываемой уравнением $p = \rho$), а также волн Z^{iklj}.

Для системы отсчета, удовлетворяющей требованиям (12.44), найдем, что в рассматриваемом случае функции X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} имеют точно такой же вид (12.71) — (12.73), как и в полугеодезической системе отсчета, и, вообще говоря, нестационарны.

В случае, когда

$$F_i = 0, \quad A_{ik} \neq 0, \qquad D_{ik} \neq 0,$$

функции X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} имеют вид

$$X^{ik} = -3A^{i}_{\cdot j}A^{kj} - DD^{ik} - D^i_jD^{kj} + (K^{ik} + \Lambda b^{ik}) + \\ + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ik} + 2U^{ik} - Ub^{ik}), \qquad (12.81)$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j (D^{ik} + A^{ik}) - {}^*\nabla^i (D^{jk} + A^{jk}), \tag{12.82}$$

$$Z^{iklj} = D^{ik}D^{lj} - D^{il}D^{kj} - K^{iklj} + A^{ik}A^{lj} - A^{il}A^{kj} + 2A^{ij}A^{kl}. \tag{12.83}$$

Так как $F_i = 0$, то из соотношения

$${}^*\partial A_{ik} = -\frac{1}{2}(D^{im}b^{kn} + b^{im}D^{kn})\, A_{mn} \tag{12.84}$$

вытекает, что нестационарность «волновых функций» обусловлена только деформацией системы отсчета. В отличие от A^{ik}, тензор A_{ik} в этом случае является стационарным.

Наконец, рассмотрев случай, когда все три характеристики системы отсчета не обращаются в нуль,

$$F_i \neq 0, \quad A_{ik} \neq 0, \quad D_{ik} \neq 0,$$

убедимся, что все три «волновые функции» (12.15)— (12.17), вообще говоря, нестационарны.

Мы исследовали достаточные условия отсутствия гравитационно-инерциальных волн, характеризуемых хронометрически инвариантными «представителями» тензора Римана, т. е. однородность и стационарность величин (12.13). Отметим, что однородность одновременно всех их обусловлена однородностью пространства.

Наряду с исследованными здесь волнами X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} представляет интерес также рассмотреть гравитационно-инерциальные волны, для которых волновыми функциями служат хронометрически инвариантные характеристики самой системы отсчета: волны деформации D_{ik}, волны вращения A_{ik}, волны гравитационно-инерциальной силы F_i, волны кривизны K_{iklj}. Мы приведем результаты этого рассмотрения [208].

Волны вращения A_{ik} при $F_i = 0$ и при любом D_{ik} отсутствуют, а при $F_i \neq 0$ существуют, если $D_{ik} \neq 0$ либо (при $D_{ik} = 0$) ${}^*\nabla_{[k}F_{i]} \neq 0$ (вихревое гравитационно-инерциальное поле).

Волны ускорения (*силы*) F_i, вообще говоря, существуют (т. е. поле F_i не является стационарным) при любых A_{ik} и D_{ik}.

Волны деформации D_{ik} существуют лишь при ${}^*\nabla_j D_{ik} \neq 0$ (неоднородность деформации) и при ${}^*\partial{}^*\partial b_{ik} \neq 0$, независимо от свойств A_{ik} и F_i.

Волны кривизны K_{ijkl} существуют в любых деформирующихся системах отсчета ($D_{ik} \neq 0$).

Этим исчерпывается перечень гравитационно-инерциальных волн в произвольных системах отсчета. Дальнейшее их исследование целесообразно вести в отношении воздействия гравитационно-инерциальных волн на конкретные физические системы. В частности, исследование влияния гравитационно-инерциальных волн на систему пробных тел, как было отмечено рядом авторов [95, 212—214], могло бы послужить выяснению возможностей лабораторного детектирования гравитационных волн произвольной природы. Хронометрически инвариантный подход мог бы сыграть при этом существенную роль как способ описания наблюдаемых — физических величин, измеряемых лабораторными средствами. В связи с этим целесообразно остановиться на проблеме экспериментального обнаружения гравитационных волн.

ГЛАВА 13

ПРОБЛЕМА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Геодезическое отклонение пробных частиц

В попытках сопоставить выводы теории гравитационного излучения с данными физического эксперимента существенную роль должно играть представление функций поля на языке наблюдаемых величин, доступных физическому измерению. В качестве таких величин мы уже рассматривали в гл. 11 инвариантные геометрические конструкции, характеризующие тензор Римана как функцию поля в рамках тетрадного формализма. В другом варианте, а именно в хронометрически инвариантном подходе гл. 12, в качестве наблюдаемых вводились хронометрически инвариантные «компоненты» тензора Римана. Рассмотрим теперь вопрос о физических основаниях экспериментального обнаружения гравитационного излучения.

Наиболее удобный способ экспериментального наблюдения величин, характеризующих гравитационные волны, составляет регистрация движения пробных частиц. Пусть дана совокупность пробных частиц, движущихся по геодезическим линиям $x^\alpha(s)$, где s — длина дуги вдоль геодезической. Пусть $x^\alpha(s, v)$ — однопараметрическое