ПРИЛОЖЕНИЕ I

Докажем некоторые теоремы, использованные в тексте. Пусть $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана пространства V_4, антисимметричный по каждой из пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Введем два сопряженных ему тензора

$$*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta}, \quad R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}. \tag{I.1}$$

Из определений (I.1) очевидным образом следует, что

$$*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{I.2}$$

Теорема 1. В пространствах Эйнштейна имеют место соотношения

$$*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = *R_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{I.3}$$

Доказательство. В силу (I.2) условие (I.3) эквивалентно условию

$$*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{I.4}$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать формулу (I.4). Воспользуемся для этого соотношениями ([172], стр. 25, 300):

$$\eta^{\sigma\mu\nu\lambda}\eta_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -\delta^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{I.5}$$

$$\eta^{\sigma\rho\mu\nu}\eta_{\sigma\rho\alpha\beta} = -2\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \tag{I.6}$$

$$\eta^{\sigma\rho\varepsilon\mu}\eta_{\sigma\rho\varepsilon\alpha} = -6\delta^{\mu}_{\alpha}, \tag{I.7}$$

где тензор $\delta^{\mu\nu\alpha\cdots}_{\lambda\beta\gamma\cdots}$ — обобщенный символ Кронекера, подчиняющийся следующим правилам: если μ, ν, α, ... все различны и λ, β, γ, ... получаются из них некоторой перестановкой, то он равен ± 1, в зависимости от того, четной или нечетной является подстановка $^{\mu\nu\alpha\cdots}_{\lambda\beta\gamma\cdots}$, а в остальных случаях он равен нулю. Умножая обе части равенства

$$*R_{\rho\sigma\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma\alpha\beta} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}$$

на $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\varepsilon\rho\sigma}$, получаем, в силу соотношений (I.6),

$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\varepsilon\rho\sigma*}R_{\rho\sigma\nu\lambda}=\frac{1}{2}\delta^{\mu\varepsilon}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}=R^{\mu\varepsilon\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}.$$

Свертывая по индексам ε и ν, находим отсюда

$$R^{\mu}_{\lambda}=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma*}R_{\rho\sigma\nu\lambda}. \tag{I.8}$$

Умножая (I.8) на $\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}$, заменяя индекс λ на δ и используя соотношения (I.5), имеем:

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}R^{\mu}_{\delta}=\frac{1}{2}\delta^{\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma}{}^*R_{\rho\sigma\nu\delta}=$$

$$=\frac{1}{2}({}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}+{}^*R_{\beta\gamma\alpha\delta}+{}^*R_{\gamma\alpha\beta\delta}-{}^*R_{\beta\alpha\gamma\delta}-{}^*R_{\alpha\gamma\beta\delta}-{}^*R_{\gamma\beta\alpha\delta})=$$

$$=3{}^*R_{[\alpha\beta\gamma]\delta}.$$

Следовательно, в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$3{}^*R_{[\alpha\beta\gamma]\delta}=\varkappa\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}=\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.9}$$

Переписывая (I.9) в виде

$$3{}^*R_{[\beta\alpha\delta]\gamma}=\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}$$

и складывая, получим:

$$2{}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}={}^*R_{\alpha\gamma\beta\delta}+{}^*R_{\beta\delta\alpha\gamma}+{}^*R_{\alpha\delta\gamma\beta}+{}^*R_{\gamma\beta\alpha\delta}+2\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.10}$$

Переставим местами в (I.10) индексы α и γ, а также β и δ:

$$2{}^*R_{\gamma\delta\alpha\beta}={}^*R_{\gamma\alpha\delta\beta}+{}^*R_{\delta\beta\gamma\alpha}+{}^*R_{\gamma\beta\alpha\delta}+{}^*R_{\alpha\delta\gamma\beta}+2\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.11}$$

Сопоставлением (I.10) и (I.11) убеждаемся в справедливости соотношений (I.4), что и доказывает теорему.

В соответствии с этой теоремой в пространствах Эйнштейна принято обозначать

$${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{I.12}$$

Лемма. В пространствах V_4 уравнения

$$l^{\alpha*}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0 \tag{I.13}$$

эквивалентны уравнениям

$$l_{\lambda}R_{\alpha\beta\gamma\delta}+l_{\alpha}R_{\beta\lambda\gamma\delta}+l_{\beta}R_{\lambda\alpha\gamma\delta}=0. \tag{I.14}$$

Доказательство. Пусть в V_4 существует вектор l^{α}, удовлетворяющий уравнениям (I.13). Умножая уравнения (I.13) на $\eta_{\mu\alpha\beta\nu}$, имеем, в силу соотношений (I.5),

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}{}_{\lambda\tau}l_\nu = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\rho\sigma\lambda\tau}\, l_\nu = -\frac{1}{2}\,\delta^{\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma}\, l_\nu R_{\rho\sigma\lambda\tau} =$$
$$= -(l_\alpha R_{\beta\gamma\lambda\tau} + l_\beta R_{\gamma\alpha\lambda\tau} + l_\gamma R_{\alpha\beta\lambda\tau}) = 0, \qquad (I.15)$$

т. е. l^α удовлетворяет также уравнениям (I.14).

Обратно, пусть существует вектор l^α, удовлетворяющий уравнениям (I.14); покажем, что он удовлетворяет также уравнениям (I.13). Проделывая выкладки (I.15) в обратном порядке, получаем соотношения, эквивалентные первоначальному условию:

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau}l_\nu = 0.$$

Умножим эти уравнения на $\eta^{\varepsilon\alpha\beta\gamma}$. В силу тождеств (I.7) получим следующий результат:

$$\delta^\varepsilon_\mu l_\nu{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau} = 0,$$

откуда

$$l_\nu{}^*R^{\varepsilon\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau} = 0,$$

т. е. l^α удовлетворяет условию (I.13), что и доказывает лемму.

Заметим, что в формулировке леммы существенно, что l^α свертывается с $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по одному из индексов первой пары, в силу неравноправия пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$, следующего из определения (I.1). В случае же пространств Эйнштейна, в силу теоремы 1, пары индексов равноправны, и условия $l^\alpha{}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и $l^\alpha{}^*R_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0$ становятся эквивалентными.

Теорема 2. В пространствах Эйнштейна $^*T_i$ (3.7) уравнения

$$l^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \qquad (I.16)$$

эквивалентны уравнениям

$$l_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + l_\alpha R_{\beta\lambda\gamma\delta} + l_\beta R_{\lambda\alpha\gamma\delta} = 0. \qquad (I.17)$$

Доказательство. Пусть в $^*T_i$ существует вектор l^α, удовлетворяющий уравнениям (I.16); покажем, что он удовлетворяет также уравнениям (I.17). Умножив исходные уравнения $l^\delta R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} = 0$ на $\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$, получим:

$$l^\delta{}^*R_{\mu\nu\gamma\delta} = 0. \qquad (I.18)$$

Вследствие теоремы 1 тензор $^*R_{\mu\nu\gamma\delta}$ симметричен по парам индексов $\mu\nu$ и $\gamma\delta$, и из (I.18) следует, что

$$l^\delta{}^*R_{\gamma\delta\mu\nu} = 0. \qquad (I.19)$$

Но, согласно лемме, условие (I.19) эквивалентно условию (I.17), что и доказывает первую половину теоремы 2.

Обратно, пусть в $*T_i$ некоторый вектор l^α удовлетворяет уравнениям (I.17). Согласно лемме, он удовлетворяет уравнениям (I.13); но, в силу теоремы 1, эти уравнения эквивалентны следующим:

$$l^\alpha R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}=0,$$

т. е.

$$\eta_{\gamma\delta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\rho\sigma}R_{\rho\sigma\alpha\beta}\,l^\alpha=0. \qquad (I.20)$$

Умножая (I.20) на $\eta^{\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\varepsilon\tau}$ и используя тождества (I.6), получим:

$$\delta^{\rho\sigma}_{\varepsilon\tau}R_{\rho\sigma\alpha\beta}\,l^\alpha=2R_{\varepsilon\tau\alpha\beta}l^\alpha=0,$$

т. е. вектор l^α удовлетворяет также уравнениям (I.16). Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 3. В пространствах Эйнштейна (3.7) имеет место тождество:

$$g^{\rho\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho\sigma}+R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+$$
$$+2\left(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}-R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)=0. \qquad (I.21)$$

Доказательство. Ковариантно дифференцируя тождества Бианки

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho}+R_{\alpha\beta\delta\rho;\gamma}+R_{\alpha\beta\rho\gamma;\delta}=0 \qquad (I.22)$$

и умножая получившиеся равенства на тензор $g^{\rho\sigma}$, получим:

$$g^{\rho\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho\sigma}+R_{\alpha\beta\delta\cdot;\gamma\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}-R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\delta\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}=0. \qquad (I.23)$$

Используя затем дифференциальные тождества Риччи (см. [9], стр. 209) в применении к тензору Римана:

$$2R_{\alpha\beta\gamma\delta,[\rho\sigma]}=R_{\lambda\alpha\gamma\delta}R_{\rho\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+R_{\alpha\lambda\gamma\delta}R_{\rho\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+R_{\alpha\beta\lambda\delta}R_{\rho\sigma\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+R_{\alpha\beta\gamma\lambda}R_{\rho\sigma\delta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}, \qquad (I.24)$$

выражаем второй и третий члены в (I.23) соответственно через $R_{\alpha\beta\delta\cdot;\sigma\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$, а также члены, квадратичные относительно тензора Римана (и не содержащие производных от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$). Учитывая, далее, тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}=2R_{\gamma[\alpha;\beta]}, \qquad (I.25)$$

вытекающее из тождеств Бианки (I.22), убеждаемся, что в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}=0. \qquad (I.26)$$

Используя соотношения (I.26), аннулируем в полученных равенствах члены вида $R_{\alpha\beta\delta\cdot;\sigma\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и приходим к соотношениям (I.21). Теорема 3 доказана.