ПРИЛОЖЕНИЕ II

Приведем в развернутом виде волновые уравнения (12.34) — (12.36) для хронометрически инвариантных компонент X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{ijkl} тензора Римана. Используем для этой цели общековариантное определение гравитационных волн Зельманова:

$$g^{\sigma\rho}R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma\rho}=0. \tag{II.1}$$

Система двадцати уравнений (II.1), очевидно, эквивалентна следующим трем системам уравнений, первая из которых состоит из шести, вторая — из восьми и третья — из шести уравнений:

$$g^{\sigma\rho}R_{00\cdot\cdot;\sigma\rho}^{\cdot\cdot ij\cdot}=R_{00}^{\cdot\cdot ij;0\cdot}{}_{0}+R_{00}^{\cdot\cdot ij;n\cdot}{}_{n}=0, \tag{II.2}$$

$$g^{\sigma\rho}R_{0\cdot\cdot\cdot;\sigma\rho}^{\cdot ijk\cdot}=R_{0}^{\cdot ijk;0\cdot}{}_{0}+R_{0}^{\cdot ijk;n\cdot}{}_{n}=0, \tag{II.3}$$

$$g^{\sigma\rho}R_{\cdot\cdot\cdot\cdot;\sigma\rho}^{kijl}=R^{kijl;0\cdot}{}_{0}+R^{kijl;n\cdot}{}_{n}=0. \tag{II.4}$$

Запишем каждую из трех систем уравнений в хронометрически инвариантном виде. Для этого воспользуемся определениями (12.13), а также формулами для хронометрически инвариантного и пространственно-ковариантного дифференцирования (см. гл. 11).

Расписывая почленно уравнения (II.2) и выражая каждый член через соответствующие хронометрические инварианты, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
({}^*\nabla_n^n-{}^*\partial{}^*\partial)\,X^{ij}+2\,({}^*\nabla_n-F_n)\,[Y_m^{\cdot(ij)}\,(D^{nm}+A^{nm})]-\\
-[F^{n*}\nabla_nX^{ij}+D{}^*\partial X^{ij}+(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i}){}^*\partial X^{nj}+(D_n^j+A_{n\cdot}^{\cdot j}){}^*\partial X^{ni}]+\\
+({}^*\partial+D)\,[2F^nY_{n\cdot\cdot}^{\cdot(ij)}-X^{ni}\,(D_n^j+A_{n\cdot}^{\cdot j})-X^{nj}\,(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i})]+\\
+2\,(D^{nm}+A^{nm}){}^*\nabla_nY_{m\cdot\cdot}^{\cdot(ij)}+2F_n\,[{}^*\partial Y^{n(ij)}-Y^{m(ij)}\,(D_m^n+A_{\cdot m}^{n\cdot})]+\\
+2F_n\,[(D_m^i+A_{m\cdot}^{\cdot i})\,(Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot jm}+Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot mj})+(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})\,(Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot mi}+Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot im})]-\\
-2D_n^m\,[X^{ni}\,(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})+X^{nj}\,(D_m^i+A_{m\cdot}^{\cdot i})]-\\
-2X^{nm}\,(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i})\,(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})+2X^{ij}\,(D_{kl}D^{kl}+A_{kl}A^{kl}-F_lF^l)+\\
+2F_n{}^{(i}X^{j)n}+2Z_{nm\cdot\cdot}^{\cdot\cdot(ij)}\,[F^nF^m-(D^{ln}+A^{ln})\,(D_l^m+A_{l\cdot}^{\cdot m})]=0.
\end{gathered} \tag{II.5}$$

Здесь F^i, D_{ij}, A_{ij} — введенные в гл. 12 вектор гравитационно-инерциальной силы, тензор скоростей деформаций и тензор угловой скорости вращения трехмерного пространства данной системы отсчета Σ относительно локально сопутствующей геодезической системы Σ_0 [205]. Несмотря на громоздкий вид этих уравнений, каждый из входящих в них членов имеет довольно ясную физическую интерпретацию. Очевидно, первый член представляет собой результат действия на хронометрически инвариантную волновую функцию волнового оператора (12.21). Укажем физический смысл еще некоторых хронометрически инвариантных операторов, входящих в уравнения (II.5). Так, релятивистский оператор

$$^*\nabla_i - F_i,$$

свернутый с некоторым хронометрически инвариантным трехмерным вектором t^i, дает выражение «физической дивергенции» вектора t^i, отличие которой от математической дивергенции $^*\nabla_i t^i$ обусловлено тем, что в различных точках границы элемента трехмерного объема величина $d\tau$ хронометрически инвариантного промежутка времени

$$d\tau = \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}$$

различна при одной и той же величине dt. Релятивистский оператор «физического дифференцирования» по времени $^*\partial + D$ отличается от математического (хронометрически инвариантного) оператора дифференцирования по времени $^*\partial$ тем, что в нем учитывается деформация со временем пространственной координатной сетки, в которой задана дифференцируемая функция.

Аналогично, выражая в хронометрически инвариантном виде уравнения (II.3), получим волновые уравнения для хронометрически инвариантного тензора Y^{ijk}:

$$\begin{aligned}
&(b^{mn}{}^*\nabla_m{}^*\nabla_n - {}^*\partial^*\partial)\, Y^{ijk} + ({}^*\partial + D)\,[Y^{mik}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - \\
&- Y^{ijm}(D^k_m + A^{\cdot k}_{m\cdot}) - Y^{mjk}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}) + (2F^{[i}X^{j]k} - F^n Z^{\cdot ijk}_{n\cdots})] - \\
&\quad - ({}^*\nabla_n - F_n)\,[X^{ik}(D^{nj} + A^{nj}) - X^{jk}(D^{ni} + A^{ni}) + \\
&\quad + Z^{\cdot ijk}_{m\cdots}(D^{nm} + A^{nm})] + [(A^{\cdot n}_{m\cdot} - D^n_m)({}^*\nabla_n - F_n)\, Z^{mijk} + \\
&\quad + (D^{ni} + A^{ni})^*\nabla_n X^{jk} - (D^{nj} + A^{nj})^*\nabla_n X^{ik}] - [F^{n*}\nabla_n Y^{ijk} + \\
&\quad + D^*\partial Y^{ijk} + (D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})^*\partial Y^{njk} - (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot})^*\partial Y^{nik} + \\
&\quad + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})^*\partial Y^{ijn} + (2F^{[j*}\partial X^{i]k} + F^{n*}\partial Z^{\cdot ijk}_{n\cdots})] + \\
&+ F_n\{2F^{[i}Y^{j]nk} + F^k Y^{ijn} + (D^{ni} + A^{ni})\, X^{jk} - (D^{nj} + A^{nj})\, X^{ik} + \\
&\quad + 2\,[2Y^{nk[i}F^{j]} + Z^{nmik}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - Z^{mnjk}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}) + \\
&\quad + Z^{mijn}(D^k_m + A^{\cdot k}_{m\cdot})]\} + 2\,\{2F^{[i}X^{j]}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot}) + \\
&\quad + X^{nk}\,[F^i(D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot}) - F^j(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})]\} + \\
&+ 2\,\{D_{mn}\,[Y^{mkj}(D^{ni} + A^{ni}) - Y^{mki}(D^{nj} + A^{nj}) - Y^{ijm}(D^{nk} + A^{nk})] + \\
&\quad + 2A_{mn}\,[Y^{m(ik)}(D^{nj} + A^{nj}) - Y^{m(jk)}(D^{ni} + A^{ni})] + \\
&+ Y^{mnk}(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})\,[Y^{min}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - \\
&\qquad - Y^{mjn}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot})]\} + \\
&\quad + Y^{ijk}(D_{nm}D^{nm} + A_{nm}A^{nm} - F_n F^n) = 0. \qquad \text{(II.6)}
\end{aligned}$$

Наконец, уравнения (II.4) дают следующую систему хронометрически инвариантных волновых уравнений для тензора Z^{kijl}:

$$
\begin{aligned}
&(b^{mn}\,{}^*\nabla_m{}^*\nabla_n - {}^*\partial{}^*\partial)\, Z^{kijl} + ({}^*\partial + D)\,[2Y^{ij[k}F^{l]} + 2Y^{kl[i}F^{j]} + \\
&\quad + (D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l})\, Z^{nik} - (D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})\, Z^{nil} + (D_n^j + A_{n\cdot}^{\cdot j})\, Z^{knil} - \\
&\quad - (D_n^i + A_{n\cdot}^{\cdot i})\, Z^{knl}] - \\
&\quad - ({}^*\nabla_n - F_n)\,[(D^{nk} + A^{nk})\, Y^{ijl} + (D^{ni} + A^{ni})\, Y^{klj} - \\
&\quad - (D^{nl} + A^{nl})\, Y^{ik} - (D^{nj} + A^{nj})\, Y^{kli}] + \\
&\quad + (D^{nl} + A^{nl})\,{}^*\nabla_n Y^{ijk} - (D^{nk} + A^{nk})\,{}^*\nabla_n Y^{il} + \\
&\quad + (D^{nj} + A^{n})\,{}^*\nabla_n Y^{kli} - (D^{ni} + A^{ni})\,{}^*\nabla_n Y^{kl} - \\
&\quad - [F^n\,{}^*\nabla_n Z^{kijl} + D\,{}^*\partial Z^{kil} + F^k\,{}^*\partial Y^{il} - \\
&\quad - F^l\,{}^*\partial Y^{ijk} + F^i\,{}^*\partial Y^{kl} - F\,{}^*\partial Y^{kli} + \\
&\quad + (D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})\,{}^*\partial Z^{nil} - (D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l})\,{}^*\partial Z^{nik} + (D_n^i + A_{n\cdot}^{\cdot i})\,{}^*\partial Z^{knjl} - \\
&\quad - (D_n^j + A_{n\cdot}^{\cdot j})\,{}^*\partial Z^{knil}] + \\
&\quad + 4\,[F^i F^{[k}X^{l]j} + F^j F^{[l}X^{k]i}] + F_n\,[Y^{ijk}(D^{nl} + A^{nl}) - \\
&\quad - Y^{il}(D^{nk} + A^{nk}) + \\
&\quad + Y^{kli}(D^{nj} + A^{n}) - Y^{klj}(D^{ni} + A^{ni}) + \\
&\quad + 2\,(Z^{nij[k}F^{l]} - Z^{nkl[i}F^{j]})] + \\
&\quad + 2\,\{(D^{ni} + A^{ni})\,[X^{kj}(D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l}) - X^{lj}(D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})] + \\
&\quad + (D^{nj} + A^{n})\,[X^{kj}(D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k}) - X^{ki}(D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l})]\} + \\
&\quad + 2\,[(D_n^i + A_{n\cdot}^{\cdot i})(2Y^{nj[k}F^{l]} + F^j Y^{kln}) + \\
&\quad + (D_n^j + A_{n\cdot}^{\cdot j})(2Y^{ni[l}F^{k]} - F^i Y^{kln}) + \\
&\quad + (D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})(2Y^{nl[i}F^{j]} + F^l Y^{in}) + \\
&\quad + (D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l})(2Y^{nk[j}F^{i]} - F^k Y^{iin})] + \\
&\quad + 2\,\{A_{m\cdot}^{\cdot n}\,[Z^{mijk}(D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l}) - Z^{mil}(D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k}) + Z^{kmil}(D_n^j + A_{n\cdot}^{\cdot j}) - \\
&\quad - Z^{kmjl}(D_n^i + A_{n\cdot}^{\cdot i})] + (D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})\,[Z^{min}(D_m^l + A_{m\cdot}^{\cdot l}) + \\
&\quad + Z^{nmil}(D_m^j + A_{m\cdot}^{\cdot j})] - (D_n^j + A_{n\cdot}^{\cdot j})\,[Z^{kmnl}(D_m^i + A_{m\cdot}^{\cdot i}) + \\
&\quad + Z^{mnik}(D_m^l + A_{m\cdot}^{\cdot l})] + (D_m^i + A_{m\cdot}^{\cdot i})\,[Z^{nmk}(D_n^l + A_{n\cdot}^{\cdot l}) - \\
&\quad - Z^{nmjl}(D_n^k + A_{n\cdot}^{\cdot k})]\} = 0. \qquad \text{(II.7)}
\end{aligned}
$$

Физическая интерпретация уравнений (II.6) и (II.7) аналогична предыдущей. Уравнениями (II.5) — (II.7) исчерпывается полная система хронометрически инвариантных уравнений, описывающих гравитационно-инерциальные волны в заданной системе отсчета. Поскольку эти уравнения представляют собой не что иное, как общековариантные уравнения (II.1), записанные в произвольной (фиксированной) системе отсчета, то эти уравнения удовлетворяются для любого пустого пространства — времени типа N по классификации Петрова (в данной системе отсчета). Таким образом, уравнения (II.5) — (II.7) могут служить хронометрически инвариантной характеристикой полей тяготения типа N в вакууме.