стоянием как $F \sim 1/r^2$, т. е. поверхностная яркость должна оставаться постоянной (теорема о сохранении интенсивности вдоль луча зрения). Какова ситуация в расширяющейся Вселенной? Выше мы показали, что линейный угловой размер источника изменяется как $\theta \sim 1/d_a \sim (1+z)/d_m$, т. е. телесный угол, под которым наблюдается источник, $\Delta\Omega \sim \theta^2 \sim (1+z)^2/d_m^2$. Интегральный же поток излучения $F \sim 1/(d_m^2(1+z)^2)$, откуда получаем

$$I(z) = \frac{F}{\Delta\Omega} \sim \frac{1}{(1+z)^4}\,. \tag{12.23}$$

Следует иметь в виду, что (12.23) справедливо для болометрического потока излучения. Поскольку любой приемник излучения имеет полосу пропускания конечной ширины, изменение поверхностной яркости в любом диапазоне спектра зависит еще от спектра самого источника.

Важное практическое применение этой формулы состоит в объяснении знаменитого парадокса Ольберса (XIX в.), согласно которому в бесконечной Вселенной, заполненной звездами, все небо полностью перекрывается дисками звезд. Это противоречит известному факту, что ночью небо темное. Разрешение этого парадокса в рамках модели расширяющейся Вселенной тривиально — яркого свечения ночного неба нет из-за значительного ослабления интенсивности с красным смещением. Вторая причина — конечное время существования звездной Вселенной. Звезд и галактик не было на больших красных смещениях (первые звезды образовались при $z < 20$), и по этой причине перекрытия неба дисками звезд нет.

12.7. Динамика Вселенной

Поведение масштабного фактора $a(t)$ или, что эквивалентно, $a(z)$ можно вывести из наблюдений, изучая зависимости принимаемый поток–красное смещение (хаббловская диаграмма) или угломерный размер–красное смещение от различных астрономических объектов, так как в выражение для потока или угломерного размера входит расстояние, зависящее от истории расширения Вселенной (см. пример на рис. 12.6 для далеких сверхновых типа Ia).

Ключевое соображение для теоретического определения $a(t)$ состоит в использовании законов гравитации для заполненной различными видами материи Вселенной. Это было впервые сделано для однородных и изотропных космологических моделей в 1920-х гг. А. Эйнштейном, В. де Ситтером и А. А. Фридманом в рамках ОТО. Однако основные соотношения можно получить и в ньютоновской модели, рассматривая ограниченную часть Вселенной (Е. А. Милн).

12.7.1. Эволюция расширения. Критическая плотность

Сначала рассмотрим простейшие однородные и изотропные космологические модели без космологической постоянной. В силу однородности возьмем в пространстве произвольную ограниченную сферическую область и проследим за ее эволюцией. Внешние области несущественны, т. к. поле тяготения, создаваемое веществом вне сферы (при строгой сферической симметрии) тождественно равно нулю (Р. Толмен, 1934, доказательство в рамках ОТО).

Рассмотрим массу, заключенную внутри выделенного шара радиуса R: $M = (4\pi/3)R^3\rho$. Изменение плотности при расширении

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3M}{(4\pi/3)R^4}\frac{dR}{dt} = -3H\rho\,. \qquad (12.24)$$

Обратим внимание, что ни радиус, ни масса шара в конечный ответ не вошли. Уравнение (12.24) означает, что если плотность в однородной среде, расширяющейся по закону Хаббла, не зависела от координат в начальный момент времени, то она не будет зависеть от координат и в последующие моменты времени.

Рассмотрим точку на границе области, расширяющейся по закону Хаббла $v = HR$. Уравнение движения записывается в виде:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho R. \qquad (12.25)$$

Умножая (12.25) на dR/dt и интегрируя, получаем закон сохранения механической энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = const\,. \qquad (12.26)$$

Определим значение константы в правой части. В момент t_0 имеем $\frac{dR}{dt}|_{t_0} = H_0R_0$, и из закона сохранения энергии находим

$$\begin{aligned}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{8\pi G\rho_0R_0^3}{3R} - \frac{8\pi GR_0^2}{3}\left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G}\right) = \\ &= G\frac{8\pi\rho_0R_0^3}{3R} - R_0^2H_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho_{cr}} - 1\right),\end{aligned} \qquad (12.27)$$

где

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 2 \cdot 10^{-29}(\text{ г/см}^3)h_{100}^2 \qquad (12.28)$$

есть так называемая *критическая плотность* в момент t_0 (численно приведена критическая плотность в настоящее время, нормированная на значение постоянной Хаббла $h_{100} = H_0/100$км/(с·Мпк)).

Выражение для ρ_{cr} можно непосредственно получить из (12.26), принимая $const = 0$, т. е. нулевое значение полной механической энергии.

Из этих формул следует несколько важных выводов для простейших моделей.

1) **История расширения**. Так как в настоящее время $dR/dt > 0$ (Вселенная расширяется), первое слагаемое в (12.27) $\sim 1/R$ возрастает с уменьшением R, а значит в прошлом скорость расширения была больше (т. е. расширение со временем должно замедляться — очевидное свойство движения с учетом тормозящего действия гравитации), и в рассматриваемой модели в прошлом был такой момент, что $dR/dt \to +\infty$ и $R \to 0$ (сингулярность). Итак, прошлое целиком определяется поведением первого слагаемого.

2) **Будущее расширения** целиком определяется знаком второго слагаемого в (12.27) (константа в законе сохранения энергии), т. е. соотношением $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_{cr}$. Возможны три варианта:

- Если $\rho_0 > \rho_{cr}$ (т. е. $\Omega_0 > 1$), то второе слагаемое отрицательное, расширение тормозится и сменяется сжатием (т. к. первое слагаемое в (12.27) стремится к 0 при $R \to +\infty$). Это модель «закрытой Вселенной», в которой полная механическая энергия отрицательна.

- Если $\rho_0 < \rho_{cr}$ (т. е. $\Omega_0 < 1$), то второе слагаемое в (12.27) положительно, и расширение продолжается вечно с асимптотической скоростью $dR/dt = H_0 R_0\sqrt{1 - \Omega_0}$ при $R \to +\infty$. Это модель «открытой Вселенной», в которой полная механическая энергия положительна.

- Если $\rho_0 = \rho_{cr}$ (т. е. $\Omega_0 = 1$), то расширение продолжается неограниченно, в пределе с асимптотически стремящейся к нулю скоростью. Это модель «плоской Вселенной», в которой полная механическая энергия равна нулю.

3) **Важный частный случай:** $\Omega_0 = 1$ **(плоская Вселенная)**. В этом случае константа в уравнении энергии точно равна нулю,

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} \tag{12.29}$$
$$\rho_0 = \rho_{cr}; \quad R|_{t_0} = R_0; \quad R|_{t=0} = 0\,.$$

Для изменения радиуса сферы получаем точное решение

$$R(t) = R_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \sim t^{2/3}\,, \tag{12.30}$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}\,. \tag{12.31}$$

Из условия $\rho(t)R(t)^3 = const$ получаем для плотности зависимость

$$\rho(t) = \frac{1}{8\pi G t^2}\,. \tag{12.32}$$

Заметим, что в уравнении (12.27) второе слагаемое, пропорциональное $(\Omega_0 - 1)$, не играет роли при $R \to 0$, т. е. в начале расширения независимо от параметра Ω_0 плотность падала по закону (12.32) $\rho \sim 1/t^2$.

Современные астрономические наблюдения дают основания предполагать ускоренное расширение Вселенной, т. е. $d^2R/dt^2 > 0$. Это можно описать, введя в модель (уравнение (12.25)) силы отталкивания, действующие на больших расстояниях. Такой физический эффект оказывает, например, положительная космологическая постоянная, введенная А. Эйнштейном в 1917 г. для получения стационарных решений ОТО в применении ко всей Вселенной. Подчеркнем еще раз, что приведенные выше рассуждения относились к моделям Фридмана *без космологической постоянной*. Введение космологической постоянной меняет картину *качественно*: наблюдаемое сегодня ускоренное расширение Вселенной означает положительную вторую производную по времени от масштабного фактора. Однако в прошлом обязательно должен был существовать период, когда масштабный фактор $R(t)$ рос с замедлением (см. ниже). В то время космологическая постоянная (или «темная энергия») *не играла динамической роли*.

12.7.2. Влияние давления

До сих пор мы рассматривали модель, в которой Вселенная заполнена материей без давления. Для обычного вещества плотность $\rho \ll \epsilon/c^2$ ($\epsilon = \rho c^2$ — плотность энергии), но для релятивистских частиц (фотоны, маломассивные нейтрино), энергия пропорциональна импульсу $E \approx pc$ (точное равенство имеет место для безмассовых частиц), давление $P = \epsilon/3$. Для обычного вещества плотность падает как куб масштабного фактора, $\rho \sim 1/V = 1/R^3$. Для релятивистских частиц при адиабатическом расширении плотность падает быстрее, т. к. уменьшается их концентрация ($\sim 1/R^3$) и уменьшается энергия каждого фотона из-за красного смещения ($\sim 1/R$), поэтому $\epsilon \sim 1/R^4$. Формальный вывод этого соотношения следует из 1-го закона термодинамики: если давление не равно нулю, оно совершает работу над соседними элементами $d(\epsilon V) = -PdV$, для излучения $P = \epsilon/3$, откуда $\epsilon \sim V^{-4/3} = 1/R^4$. Поскольку для излучения в термодинамическом равновесии $\epsilon = a_r T^4$, температура равновесного излучения в расширяющейся Вселенной падает обратно пропорционально масштабному фактору: $T \sim 1/R$, что, впрочем, очевидно, так как изменившаяся функция Планка $B_{\nu(1+z)}$ останется той же планковской формулой, только для температуры не T, а $T(1+z)$. Значит температура равновесного излучения эволюционирует при адиабатическом расширении так же, как и частота, т. е. изменяется пропорционально красному смещению.

Эти простые рассуждения показывают, что, уходя в прошлое, мы должны рано или поздно начать учитывать влияние давления частиц P. Как было показано Толменом, в рамках ОТО учет давления сводится к замене плотности на сумму плотности энергии и утроенного давления:

$$\rho c^2 \to \epsilon + 3P \tag{12.33}$$

(давление как бы создает добавочную плотность и само является источником гравитационного поля в ОТО).

Тогда уравнение движения (12.25) запишется как

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} R\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \tag{12.34}$$

а уравнение энергии (12.26) не изменится. Подчеркнем, что в ОТО при наличии давления ускорение при расширении зависит от суммы $\rho + 3P/c^2$, а потенциальная энергия по-прежнему определяется только плотностью вещества ρ. Из (12.34) следует, что если $P > 0$ (кроме самой начальной стадии расширения, см. ниже), то в ранней Вселенной эффективная плотность была больше из-за огромного давления релятивистских частиц и излучения, а положительное давление на самом деле всегда *замедляет* расширение! Определяя, как и раньше, константу энергии из условия $dR/dt|_{t_0} = H_0 R_0$, получаем, что динамика расширения и при наличии давления всецело зависит только от величины полной плотности $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_{cr}$.

Рассмотрим случай доминирования излучения, т. е. ту раннюю эпоху, когда плотность энергии целиком определялась излучением. Тогда $P = P_r = \epsilon_r/3$, $\epsilon_r = a_r T^4$, $\epsilon_r \sim V^{-4/3} = A/R^4$, где A некоторая постоянная. Уравнение энергии при этом имеет вид:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{G}{R}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{A}{c^2 R^4} = const\,.$$

При малых R константа в правой части не важна (независимо от ее знака, т. е. при любом Ω_0), и решение этого уравнения: $R(t) \sim \sqrt{t}$ при $R \to 0$.

12.8. Модели Фридмана с космологической постоянной

Как отмечалось выше, ускоренное расширение можно понять, если ввести дополнительное положительное слагаемое в уравнение движения (12.34) или считать, что выражение в скобках в этом уравнении отрицательно. Фактически, это две разные интерпретации одного и того же явления. Первая возможность реализуется в моделях Фридмана с космологической постоянной, а последняя — если предположить, что Вселенная заполнена некоторой субстанцией («темной энергией») с отрицательным давлением[3]. Пока неясно, какая из этих возможностей отвечает за наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной; не исключено, что на самом деле природа устроена даже более сложно, и расширение должно описываться другими уравнениями. Космологическая постоянная Λ, введенная в уравнения ОТО А. Эйнштейном, представляется простейшей модификацией модели, поэтому ниже без вывода мы приводим основные фор-

[3]Обычно давление параметризуют простейшим образом как $P = w\epsilon$, где ϵ — положительная плотность энергии, а $w < 0$ — коэффициент пропорциональности, который, вообще говоря, может зависеть от времени. Случай $w = -1$ соответствует космологической постоянной Эйнштейна.