самой начальной стадии расширения, см. ниже), то в ранней Вселенной эффективная плотность была больше из-за огромного давления релятивистских частиц и излучения, а положительное давление на самом деле всегда *замедляет* расширение! Определяя, как и раньше, константу энергии из условия $dR/dt|_{t_0} = H_0 R_0$, получаем, что динамика расширения и при наличии давления всецело зависит только от величины полной плотности $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_{cr}$.

Рассмотрим случай доминирования излучения, т. е. ту раннюю эпоху, когда плотность энергии целиком определялась излучением. Тогда $P = P_r = \epsilon_r/3$, $\epsilon_r = a_r T^4$, $\epsilon_r \sim V^{-4/3} = A/R^4$, где A некоторая постоянная. Уравнение энергии при этом имеет вид:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{G}{R}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{A}{c^2 R^4} = const\,.$$

При малых R константа в правой части не важна (независимо от ее знака, т. е. при любом Ω_0), и решение этого уравнения: $R(t) \sim \sqrt{t}$ при $R \to 0$.

12.8. Модели Фридмана с космологической постоянной

Как отмечалось выше, ускоренное расширение можно понять, если ввести дополнительное положительное слагаемое в уравнение движения (12.34) или считать, что выражение в скобках в этом уравнении отрицательно. Фактически, это две разные интерпретации одного и того же явления. Первая возможность реализуется в моделях Фридмана с космологической постоянной, а последняя — если предположить, что Вселенная заполнена некоторой субстанцией («темной энергией») с отрицательным давлением[3]. Пока неясно, какая из этих возможностей отвечает за наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной; не исключено, что на самом деле природа устроена даже более сложно, и расширение должно описываться другими уравнениями. Космологическая постоянная Λ, введенная в уравнения ОТО А. Эйнштейном, представляется простейшей модификацией модели, поэтому ниже без вывода мы приводим основные фор-

[3]Обычно давление параметризуют простейшим образом как $P = w\epsilon$, где ϵ — положительная плотность энергии, а $w < 0$ — коэффициент пропорциональности, который, вообще говоря, может зависеть от времени. Случай $w = -1$ соответствует космологической постоянной Эйнштейна.

мулы модели однородной изотропной Вселенной с положительной космологической постоянной.

Уравнение энергии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \left(\frac{kc^2}{a^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{12.35}$$

Уравнение движения:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{12.36}$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right). \tag{12.37}$$

Замечания и частные случаи.

1. В уравнения Фридмана (12.35)–(12.37) не входят произвольные физические константы, т. е. при заданном знаке кривизны пространства ($k = \pm 1, 0$) и Λ эволюция происходит по определенному закону, зависящему только от связи давления и плотности (уравнения состояния) $P(\rho)$.

2. Обозначим $\dot{a}/a \equiv H$ — параметр Хаббла и поделим на H^2 обе части уравнения энергии (12.35). Вводя безразмерные переменные $\Omega_m = 8\pi G\rho/3H^2 = \rho/\rho_{cr}$, $\Omega_c = -(kc^2)/(a^2H^2)$, $\Omega_\Lambda = (\Lambda c^2)/(3H^2)$, записываем уравнение энергии, верное для любого момента времени, в компактном виде:

$$1 = \Omega_m + \Omega_c + \Omega_\Lambda. \tag{12.38}$$

Это уравнение характеризует относительный вклад трех компонент, связанных с веществом (Ω_m), кривизной пространства (Ω_c) и космологической постоянной (или «темной энергией») (Ω_Λ) в полную плотность энергии Вселенной.

3. Космологическая постоянная Λ имеет размерность [см$^{-2}$]. Современные наблюдения указывают на значение $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Это зна-

чит, что плотность энергии, связанная с современной космологической постоянной,

$$\epsilon_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_{cr} c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \sim \rho_{cr} c^2 \sim 10^3\,(\text{эВ} \cdot \text{см}^{-3})\,.$$

При $\Lambda = const$ плотность этой энергии не изменяется при адиабатическом расширении: $\epsilon_\Lambda = const$. Именно таким свойством обладает физический вакуум — наинизшее энергетическое состояние любых физических полей. Как показывается в квантовой теории, энергия вакуума складывается из неуничтожимых квантовых нулевых колебаний полей. Эффективное уравнение состояния для вакуума можно записать в виде $P_v = -\epsilon_v$, и если подставить это соотношение в первое начало термодинамики для адиабатического расширения $d(\epsilon_v V) + P_v dV = 0$, то получим $\epsilon_v = const$. Таким образом, физический вакуум мог бы играть роль космологической постоянной. Проблема, однако, состоит в чрезвычайной малости наблюдаемого значения ϵ_Λ по сравнению с теоретически ожидаемой величиной ϵ_v, которая должна быть на много десятков порядков(!) больше[4]. Эта проблема наблюдаемой малости энергии вакуума (если интерпретировать ускоренное расширение Вселенной моделями с космологической постоянной) известна в физике как *проблема космологической постоянной* и пока не решена.

4. Уравнение (12.36) можно переписать в виде ньютоновского уравнения движения точки на поверхности сферы радиуса $R = a$ (см. предыдущее рассмотрение), заключающей массу M:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} R. \tag{12.39}$$

Здесь полная «гравитационная масса» $M = \frac{4\pi}{3} R^3 (\rho + 3P/c^2)$ записана так, чтобы отражать упоминавшийся выше факт, что положительное давление создает дополнительное притяжение в ОТО. Из уравнения (12.39) следует, что частица на сфере испытывает как силу притяжения массой M, так и силу отталкивания $F_{rep} = \frac{\Lambda c^2}{3} R$, которая вызвана положительной космологической постоянной и возрастает с расстоянием. (В теоретически допустимом случае отрица-

[4]Например, записывая космологическую постоянную в естественных (планковских) единицах, $\Lambda \sim 1/l_p^2$ ($l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ — планковская длина), плотность энергии оказывается $\epsilon_\Lambda \sim c^7/(8\pi G^2 \hbar) \sim 10^{126}$эВ $\cdot$ см$^{-3}$.

тельной космологической постоянной появилась бы дополнительная сила «притяжения», формально похожая на силу, обеспечивающую конфайнмент кварков в адронах). Из этого соотношения видно, что космологическая постоянная динамически влияет на характер расширения только при больших масштабных факторах.

5. Знак пространственной кривизны (т. е. гауссовой кривизны 3-мерной гиперповерхности постоянного времени) не изменяется в ходе эволюции Вселенной, хотя величина ее (если кривизна ненулевая), разумеется, зависит от времени. Подчеркнем, что кривизна пространства определяется полной плотностью энергии, которая включает в себя плотность всех видов материи, как видимой (барионной), так и невидимой (небарионной), имеющих положительное давление и являющихся источником гравитации, а также плотность «темной энергии» с отрицательным давлением, создающей своего рода «антигравитацию» в больших масштабах: $\Omega_c = 1 - (\Omega_m + \Omega_\Lambda)$. Современные наблюдения далеких сверхновых и реликтового излучения дают $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ с точностью, лучше 10%, т. е. кривизна 3-мерного пространства мала (возможный радиус кривизны должен быть больше нескольких хаббловских радиусов $c/H_0 \sim 10^{28}$ см).

6. В наиболее интересном, с точки зрения современных наблюдений, случае плоской Вселенной ($k = 0$), заполненной гравитирующей материей с плотностью Ω_m, и космологической постоянной с плотностью Ω_Λ, имеем $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, и параметр Хаббла $H(z)$ определяется уравнением (12.35), которое можно переписать в виде:

$$H^2(z) = H_0^2(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda)\,. \qquad (12.40)$$

В случае пылевидной материи (т. е. не создающей давления, $P = 0$) для роста масштабного фактора от времени есть аналитическое решение уравнений Фридмана:

$$a(t) \sim \left(\sinh \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}ct\right)^{2/3}, \qquad (12.41)$$

которое гладко переходит от знакомого нам степенного закона роста ($a \sim t^{2/3}$), когда роль космологической постоянной динамически не важна, к стадии чисто экспоненциального расширения ($a \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$).

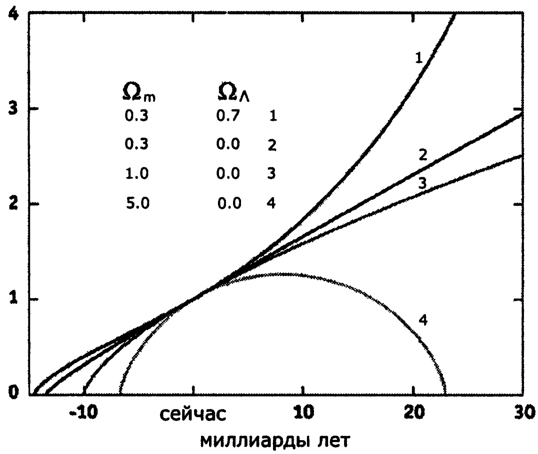

Рис. 12.7. Качественная зависимость масштабного фактора от времени для фридмановских моделей. Ω_m и Ω_Λ — доля плотности всей материи (видимой и невидимой) и темной энергии (космологической постоянной) в единицах критической плотности.

Красное смещение z_{co}, на котором происходит смена режима ускорения на замедление, находится по формуле $1+z_{co} = [2\Omega_\Lambda/\Omega_m]^{1/3}$. Наблюдательные данные по измерению расстояний до далеких сверхновых типа Ia, а также анализ флуктуаций реликтового излучения, свидетельствуют в пользу плоской модели с $\Omega_\Lambda \approx 0.7$, т. е. красное смещение, начиная с которого Вселенная расширяется с ускорением, $z_{co} \simeq 0.6$–0.7. Очевидно, это значение будет уточняться по мере накопления данных наблюдений. Качественный вид истории изменения масштабного фактора в современной модели расширения представлен на рис. 12.8.

Параметр замедления (12.8) при $k = 0$ записывается в виде:

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda = \frac{3}{2}\Omega_m - 1\,.$$

Фотометрическое расстояние находится подстановкой (12.40) в кинематическое соотношение (12.22)

$$d_l(z) = (1+z)\frac{c}{H_0}\int\limits_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}\,, \qquad (12.42)$$

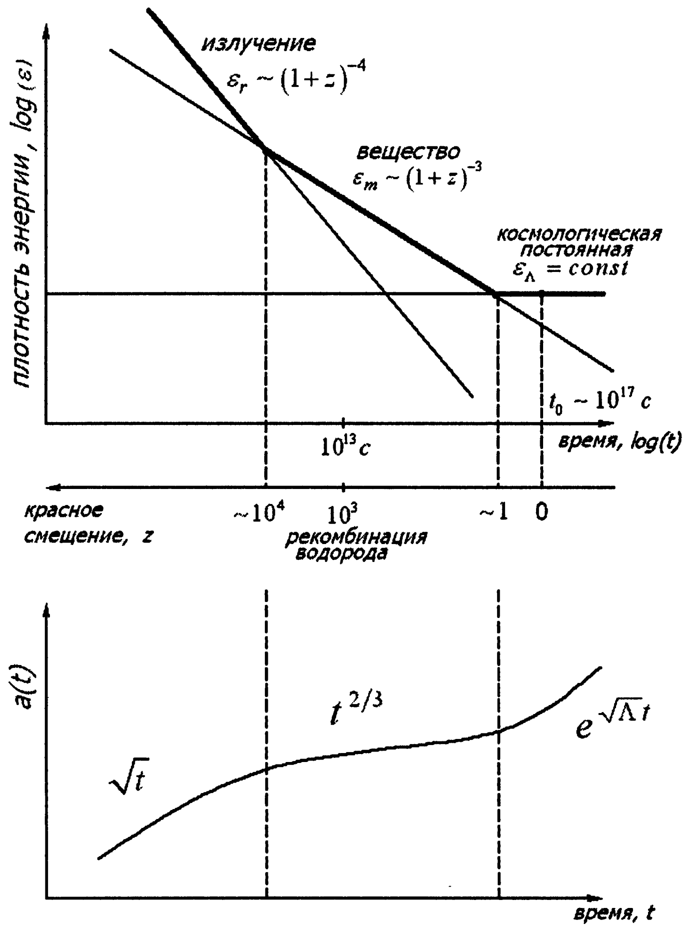

Рис. 12.8. Изменение плотности энергии различных компонентов Вселенной со временем, отсчитываемым от начала расширения. На нижнем графике — качественная зависимость масштабного фактора от времени в модели Вселенной с излучением, веществом и космологической постоянной $\Lambda > 0$.

а возраст Вселенной (время, прошедшее с начала расширения) на красном смещении z — подстановкой (12.40) в (12.14):

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int\limits_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}. \tag{12.43}$$

Отсюда полный возраст Вселенной, соответствующий интервалу красных смещений $(0, \infty)$, получается равным

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}\left[\frac{1}{2\sqrt{\Omega_\Lambda}}\ln\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{1-\sqrt{\Omega_\Lambda}}\right] > \frac{2}{3H_0},$$

где $\Omega_\Lambda = \Lambda c^2/3H_0^2 = 1 - \Omega_m$. Для $\Omega_\Lambda \simeq 0.7, H_0 = 70$ км/(с·Мпк) $t_0 \simeq 13.7$ млрд. лет и согласуется с измерениями возрастов звезд и галактик.

Полезное практическое приближение для возраста далеких объектов (с красным смещением $z \gg z_{co} \simeq 1$) в плоской Вселенной получается из формулы (12.43), если учесть, что на таких красных смещениях космологическая постоянная не оказывает динамического влияния на расширение Вселенной, и в формулах можно положить $\Omega_\Lambda = 0$. Тогда $a(t) \sim t^{3/2}$, $H(t) \simeq 2/(3t)$ и для стандартных параметров $\Omega_m = 0.3$ и $H_0 = 70$ км/(с·Мпк) получаем для времени, прошедшего с начала расширения до эпохи с красным смещением z:

$$t(z) \approx \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_m}}(1+z)^{-3/2} \approx 7.7\cdot 10^8(\text{лет})\left(\frac{1+z}{10}\right)^{-3/2}.$$

Эта формула является хорошим приближением в интервале красных смещений от ~ 1 до ~ 100. Первые же гравитационно-связанные объекты могли образоваться только после эпохи рекомбинации на красных смещениях $z \lesssim 20$.

12.9. Горячая Вселенная

Решение Фридмана приводит к $\rho \to \infty$ при $z \to +\infty, t \to 0$ (напомним, что на ранних стадиях $\rho(t) \sim 1/t^2$ независимо от давления, космологической постоянной и полной плотности Ω_0!). С физической точки зрения обращение плотности в бесконечность не имеет сысла и говорит о том, что требуется более адекватное описание.

Физическое описание состояния материи при сверхвысоких плотностях и температурах базируется на определенных постулатах.

1. Остаются в силе основные физические принципы: сохранение барионного и лептонного числа и электрического заряда при взаимодействиях частиц, I-е и II-е начала термодинамики.

2. Если время установления равновесия между взаимодействующими частицами много меньше времени расширения, то можно счи-