Светимость звезды на конвективной стадии Хаяши определяется очевидным соотношением

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{T_{eff}}{T_\odot}\right)^4 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \simeq 400 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2.$$

Такие объекты наблюдаются как мощные ИК источники в областях звездообразования. Время сжатия зависит от способности излучать выделяемую гравитационную энергию,

$$t \sim \frac{GM^2}{RL} \simeq \frac{GM^2}{4\pi R^3 \sigma_B T_{eff}^4} \sim 8 \cdot 10^7 \bar{\rho} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{лет.}$$

Как только температура и плотность в центре звезды возрастут до значений, при которых начнутся ядерные реакции, молодая звезда превратится в обычную звезду на главной поледовательности диаграммы Герцшпрунга–Рессела. Как правило, молодая звезда окружена непрозрачной оболочкой — остатком газопылевого облака, продолжающим падать на нее. И лишь со временем окружающая среда «просветляется».

Разумеется, реальная картина сжатия молодых звезд существенно сложнее. В частности, мы пренебрегали эффектами магнитного поля и вращения. Как и на более ранних стадиях, оба эффекта препятствуют сжатию протозвезд. Также важно, что массивная молодая звезда оказывается окруженной непрозрачной газопылевой средой, и требуется время, чтобы эта оболочка частично упала на звезду, а частично — была рассеяна лучевым давлением.

5.4. Стационарные звезды

Физическое состояние стационарных звезд определяется условиями гидростатического равновесия, когда макроскопические параметры (масса, радиус и т. д.) медленно изменяются на временах много больших динамического времени $t_{ff} \sim 1/\sqrt{G\rho}$ и времени установления теплового равновесия. Несмотря на происходящее в центре энерговыделение, звезды не взрываются, их светимость меняется плавно.

5.4.1. Гидростатическое равновесие

Рассмотрим объем вещества dV с давлением P. Сила, стремящаяся расширить объем, $\mathbf{F} = -\int P d\mathbf{S}$, где $d\mathbf{S}$ — элемент замкнутой поверхности. Очевидно, если $P = const$, то $\mathbf{F} = 0$. Сила, действующая на элемент объема $dV = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{dS})$, пропорциональна градиенту давления

$$d\mathbf{F}_p = -Pd\mathbf{S} = -\mathbf{r}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{S} = -\nabla P dV. \tag{5.3}$$

Сила гравитационного притяжения, действующая на элемент массы $dm = \rho dV$, $d\mathbf{F}_g = -\nabla\phi dm$, где $\phi(r) = -\int\limits_r^\infty Gm(x)/x^2 dx$ — ньютоновский гравитационный потенциал. Таким образом, результирующая сила, действующая на элементарный объем в звезде,

$$d\mathbf{F} = -\nabla\phi dm - \nabla P dV. \tag{5.4}$$

В условиях равновесия суммарная сила равна нулю, откуда получаем уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\phi = 0. \tag{5.5}$$

Для сферически-симметричного случая: $M(r) = \int\limits_0^r 4\pi x^2 \rho(x) dx$, $\nabla\phi = GM(r)/r^2$ и

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + \frac{GM(r)}{r^2} = 0. \tag{5.6}$$

Для оценок по порядку величины можно пользоваться приближенной формой уравнения гидростатического равновесия

$$\frac{P}{\rho} \sim \frac{GM}{R}, \tag{5.7}$$

где M и R — масса и радиус звезды. Эта формула дает хорошее приближение для центрального давления в звездах главной последовательности.

5.4.2. Теорема вириала для звезды

Прямым следствием уравнения гидростатического равновесия (5.5) является *теорема вириала*, связывающая тепловую (кинетическую) и потенциальную (гравитационную) энергию стационарной звезды (см. также Приложение А.3). Переходя к лагранжевой массе

$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ в качестве независимой переменной, запишем (5.6) в виде

$$4\pi r^2 \frac{dP}{dm} = -\frac{GM(r)}{r^2}\,. \tag{5.8}$$

Умножим обе части на $(r\,dm)$ и проинтегрируем от 0 до M по частям. В результате приходим к теореме вириала для самогравитирующих газовых шаров

$$U = -\int\limits_0^M \frac{GM(r)dm}{r} = -3\int PdV \tag{5.9}$$

(при выводе использовано граничное условие $P|_{M(R)} = 0$ — равенство нулю давления на поверхности газового шара).

В важном частном случае политропного уравнения состояния $P = K\rho^{\gamma}$[1], удельная внутренняя энергия $\epsilon = P/((\gamma-1)\rho)$, поэтому получаем

$$U = -3(\gamma - 1)Q\,, \tag{5.10}$$

где $Q = \int \epsilon\rho dV$ — тепловая энергия.

Пример. Оценим характерную температуру в недрах Солнца. Считаем, что Солнце — однородный шар и состоит из идеального одноатомного газа, $\gamma = 5/3$. $Q \approx 3/2 \cdot NkT \approx 3/2 \cdot M/\mu\mathcal{R}T$, $U \approx -3/5GM^2/R$ и находим для $\mu \approx 0.6$ (с учетом молекулярного веса полностью ионизованной плазмы, состоящей по массе на 75 % из водорода и на 25 % из гелия) $\langle T\rangle = \mu GM/(5R\mathcal{R}) \sim 10^7$ К. Более точные оценки приводят к значению около 15 млн. градусов для центра Солнца.

Рассмотрим два физически важных случая.

1) $\gamma = 5/3$. Этот показатель адиабаты соответствует идеальному одноатомному газу, а также нерелятивистскому вырожденному ферми-газу. Из (5.10) получаем $2Q = -U$, т. е. знакомый вид теоремы вириала в механике для движения тел в центрально-симметричном поле с потенциалом $\propto 1/r$.

2) $\gamma = 4/3$. Этот показатель адиабаты характерен для газа из релятивистских частиц (например, фотонов или безмассовых нейтрино), когда связь между давлением и плотностью энергии $P = \epsilon/3$,

[1]Это уравнение состояния пригодно как для описания идеального невырожденного, так и вырожденного газа; в первом случае $\gamma = C_P/C_V$ — показатель адиабаты идеального газа, во втором случае γ есть так называемый обобщенный показатель адиабаты и определяется плотностью вещества.

или для релятивистского вырожденного ферми-газа. В этом случае теорема вириала (5.10) для равновесной самогравитирующей конфигурации дает $Q = -U$, $E = Q + U = 0$, т. е. такая конфигурация находится в положении *безразличного* равновесия:

$$U \sim -GM^2/R = -GM^{5/3}\rho^{1/3},$$
$$Q \sim MP/\rho \sim MK\rho^{1/3}.$$

Полная энергия

$$E = U + Q = (-GM^{5/3} + KM)\rho^{1/3} = KM\rho^{1/3}\left(1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}\right)$$

является линейной функцией $\rho^{1/3}$, и равновесие ($E = 0$) возможно только при одном значении массы: $M = M_0 = (K/G)^{3/2}$. При $M < M_0$ полная энергия положительна, $E > 0$, т. е. объект гравитационно не связанный и распадается ($\rho \to 0$). При $M > M_0$ полная энергия отрицательна, $E < 0$, и под действием малых радиальных возмущений система коллапсирует ($\rho \to \infty$).

Более аккуратный анализ устойчивости звезд с политропным уравнением состояния $P = K\rho^\gamma$ показывает, что динамическая неустойчивость всегда наступает при $\gamma \to 4/3$.

Потеря механической устойчивости происходит в динамической шкале времени (т. е. за время свободного падения в гравитационном поле), $t_d \sim t_f \sim 1/\sqrt{G\rho} \approx 50(\text{мин})(\rho/\rho_\odot)^{-1/2}$. Потеря устойчивости, например, имеет место при гравитационном коллапсе ядер массивных звезд в конце их эволюции.

Отметим также, что теорема вириала для систем из многих частиц, устанавливающая связь между средней по времени кинетической энергией системы и ее потенциальной энергией, может быть получена не только из термодинамического рассмотрения, но и непосредственно из классических и квантовых уравнений движения. Она применима как для динамически устойчивых макроскопических систем (например, звездных скоплений), так и для квантовых систем (заряженные частицы в кулоновском поле).

5.4.3. Тепловая устойчивость звезд. Отрицательная теплоемкость

Рассмотрим теорему вириала для звезды из одноатомного идеального газа. Это хорошее приближение для вещества невырожденных звезд главной последовательности ($\gamma = 5/3$): $2Q = -U$,

$E = Q + U = -Q$. Отсюда следует равенство $\Delta E = -\Delta Q$, т. е. поглощение энергии звездой ($\Delta E > 0$) приводит к ее *охлаждению*, $\Delta Q < 0$, а излучение энергии ($\Delta E < 0$) — к *разогреву*, $\Delta Q > 0$. Иными словами, звезда, находящаяся в гидростатическом равновесии (т. е. подчиняющаяся теореме вириала), обладает *отрицательной теплоемкостью*: $E = U + Q = -Q = -C_v M\langle T\rangle$ (здесь $C_v > 0$ — удельная теплоемкость газа звезды), $dE/dT = -C_v M < 0$. Из-за отрицательной теплоемкости рост энерговыделения приводит к уменьшению температуры, что играет роль регулирующего механизма, поэтому термоядерные реакции в звездах идут в течение многих миллионов лет и не носят взрывной характер.

Заметим, что теорема об отрицательной теплоемкости справедлива для любой стационарной системы в поле тяготения — например, спутник на стационарной орбите вокруг Земли: при торможении спутника в атмосфере (отбор энергии от системы Земля–спутник) он переходит на более низкую орбиту с увеличением скорости $v \sim 1/\sqrt{r}$ (аналог нагрева при потере энергии).

Характерное время установления теплового равновесия в звезде (т. н. тепловое время, или *время Кельвина–Гельмгольца*) также можно определить из теоремы вириала, приравняв его времени, необходимому для истощения запаса тепловой энергии при заданном темпе потерь (т. е. светимости L). Имеем: $Q = -U/2 \sim GM^2/R$,

$$t_{KH} = \frac{Q}{L} = \frac{GM^2}{RL} \approx 30\,(\text{млн. лет})\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \qquad (5.11)$$

(во втором равенстве использовано соотношение масса–радиус и масса–светимость для нормальных звезд околосолнечной массы: $R \sim M$, $L \sim M^3$, см. раздел 5.7). В XIX в. Кельвин и Гельмгольц именно так оценивали время жизни Солнца. Любопытно, что Кельвин не принимал теорию эволюции Дарвина (которая требовала миллиардов лет для развития видов) именно на основании своего заключения о возрасте Солнца в 30 млн. лет! В начале XX в., когда стало ясно, что возраст Земли намного превосходит 30 млн. лет, возникла необходимость поиска источника энергии Солнца и звезд. Таким источником оказались термоядерные реакции синтеза тяжелых элементов из водорода и гелия.