проходить только за счет квантового туннельного эффекта и требует очень высоких температур.

Ядро ^{12}C немедленно вступает в реакцию с ядрами гелия:

$$^{4}\mathrm{He} + ^{12}\mathrm{C} \rightarrow ^{16}\mathrm{O} + 7.16\,\text{МэВ}. \quad (6.1)$$

Ее скорость сильно зависит от температуры, которая определяется массой звезды, поэтому окончательный результат горения гелия в звездах — образование углеродно-кислородного или чисто кислородного ядра.

На последующих стадиях эволюции массивных звезд в центральных областях звезды при высоких температурах происходят реакции непосредственного слияния тяжелых ядер. Энерговыделение в реакциях горения ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne,^{24}Mg, ^{28}Si сравнимо с энерговыделением в 3α-реакции, однако при высоких температурах $\sim 10^9$ K все более важным становится унос энергии нейтринным излучением. Время жизни звезды на этих стадиях намного меньше, чем время горения гелия. Вероятность обнаружения таких звезд мала, и в настоящее время горение ^{12}C с образованием более тяжелых элементов встречается только в ядрах редких массивных звезд типа Вольфа–Райе класса WO.

6.2. Вырождение вещества

Газ может рассматриваться как идеальный пока энергия взаимодействия между его частицами пренебрежимо мала по сравнению с тепловой энергией. Приближение идеального одноатомного газа со средней энергией на одну частицу $E = 3/2kT$ прекрасно описывает поведение плазмы в центре Солнца и более массивных звезд главной последовательности.

С повышением плотности средние расстояния между частицами уменьшаются, $\delta l \sim \rho^{-1/3}$, и когда они станут сопоставимы с де-Бройлевской длиной волны, $\lambda = h/p$ (p — импульс частиц), начнут сказываться их квантово-механические свойства. Важнейшее из этих свойств связано с т. н. *вырождением* газа из частиц с полуцелым спином, из-за которого радикальным образом меняются термодинамические свойства вещества.

В применении к частицам с полуцелым спином — фермионам (e, n, p) действует принцип Паули (В. Паули, 1925): частицы идентичны, если они имеют одинаковый спин, а для их координат и импульсов существуют квантово-механические ограничения:

$$\delta p_x \delta x = h\,, \quad \delta p_y \delta y = h\,, \quad \delta p_z \delta z = h\,.$$

Отсюда следует, что одна ячейка фазового пространства

$$\delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z = h^3$$

может содержать не более двух фермионов (если их спины противоположны). Принцип Паули позволил объяснить периодическую таблицу элементов Менделеева.

При равновероятной ориентации вектора импульса объем фазового пространства, приходящийся на 1 электрон, который в предельном случае равен $h^3/2$, составляет $(1/n_e)(4\pi p^3/3)$. Здесь первый член в скобках — пространственный объем на одну частицу, где $n_e = Y_e\rho/m_p$ (Y_e — число электронов, приходящихся на один нуклон), а второй — объем шара в пространстве импульсов, радиус которого примерно равен вероятному значению полного импульса частиц $p_F = (p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{1/2}$ для рассматриваемого предельного случая (т. н. *импульс Ферми*).

Для идеального газа наиболее вероятное значение импульса $p = m_e\sqrt{2kT/m_e}$. Поэтому на одну частицу приходится в среднем фазовый объем $(1/n_e)(4\pi/3)(2kTm_e)^{3/2}$, при разрешенном объеме, составляющем не менее $h^3/2$. В нормальных звездах последняя величина пренебрежимо мала по сравнению с первой, т. е. квантовыми эффектами можно пренебречь. Абсолютное большинство квантовых ячеек с объемом $h^3/2$ не будет содержать ни одной частицы.

Однако при возрастании n_e или уменьшении T должен наступить предел применимости приближения идеального газа, когда существенная доля всех ячеек фазового пространства окажется заполненной, и плотность частиц в фазовом пространстве уже не может быть увеличена. Любой процесс сжатия газа будет приводить к росту средних значений импульсов (скоростей) частиц, не связанному с изменением температуры, и, следовательно, к росту давления, препятствующему сжатию. Приравнивая $h^3/2$ среднему объему фазового пространства, приходящемуся на одну частицу, получаем, что критическая температура (температура вырождения)

$$T_c = \left(\frac{h^3 n_e}{8\pi/3}\right)^{2/3} (2km_e)^{-1} \sim \mathcal{E}_F/k\,,$$

где $\mathcal{E}_F = p_F^2/2m_e$ — энергия Ферми для нерелятивистских частиц. Опуская константы, для значений температуры T_c и плотности ρ_c, при которых происходит заполнение ячеек фазового пространства, получаем: $T_c \sim n_e^{2/3} m_e^{-1} h^2$, или $\rho_c \sim (Tm_e/h^2)^{3/2}$. Вырождение наступает при $T < T_c$ или $\rho > \rho_c$. Импульсы (скорости) электронов становятся выше тепловых (все разрешенные значения для тепловых скоростей уже заняты).

Пример. Рассмотрим газ в центре Солнца — $\rho \approx 150$ г/см^3, вещество полностью ионизовано, из-за электронейтральности плазмы концентрация зарядов отрицательного знака (электронов) равна концентрации положительных ионов, для чисто водородной плазмы $n_e \approx n_p = \rho/m_p \approx 6 \cdot 10^{23} \cdot 150 \sim 10^{26}$ см$^{-3}$, температура $T_{\odot} > 10^7$ K, т. е. больше $T_c \approx 3 \cdot 10^{-11} (10^{26})^{2/3} \approx 3 \cdot 10^6$ K, и следовательно электроны в центре Солнца невырождены.

Вырождение может быть различным — от слабого до релятивистского. В последнем случае при очень высокой плотности $\rho \gg \rho_c$ (для вещества с характерной для звездных недр температурой эта плотность $\rho_c \simeq 10^6$ г/см^3) электроны становятся релятивистскими, для них энергия Ферми $\mathcal{E}_F$ становится много больше $m_e c^2$. Скорости протонов при этом остаются тепловыми, поскольку, как было показано выше, критическое значение $\rho_c \sim m^{3/2}$, и протонный газ остается невырожденным.

Важнейшим отличием вырожденного газа от идеального является то, что уравнение состояния при вырождении иное. Давление электронного газа уже определяется не температурой среды, а скоростями V_e нетеплового движения электронов, связанного с квантово-механическим вырождением

$$\dot{P}_e \sim \rho V_e^2 = (n_e m_e) V_e^2 \,.$$

Поскольку на один электрон приходится фазовая ячейка с объемом, пропорциональным $n_e^{-1}(m_e V_e)^3$, которая ограничена величиной $h^3/2$, мы имеем $V_e \sim h n_e^{1/3} m_e^{-1}$, а следовательно

$$P_e \sim h^2 n_e^{5/3} m_e^{-1} \,. \tag{6.2}$$

Концентрация электронов пропорциональна полной плотности вещества, откуда можно заключить, что давление электронного газа пропорционально $\rho^{5/3}$, т. е. $P_e = K_{5/3} \rho^{5/3}$, где $K_{5/3}$ — константа. При релятивистском вырождении средняя энергия электронов становится сопоставимой со скоростью света, и это немного ослабляет степень зависимости давления от плотности. Более медленный рост энергии релятивистских электронов с возрастанием их импульса $E_e \sim p_F c$ приводит к более мягкой зависимости давления от плотности:

$$P_e \sim \rho^{4/3}.$$

В общем случае надо рассматривать давление газа как состоящее из двух компонент: $P_g = P_{th} + P_e$, где P_{th} — тепловое давление, обусловленное хаотическим движением невырожденных частиц. Для идеального ионизованного газа оно связано в равной мере как с протонами, так и электронами, но в случае вырожденного газа электронная составляющая давления P_e значительно превосходит P_{th}.

Давление вырожденного нерелятивистского (или слаборелятивистского) электронного газа удержит белые карлики от сжатия, даже если их температура будет сколь угодно низкой: движение электронов в звезде не прекратится и при абсолютном нуле (как оно не прекращается в обычных атомах любого вещества).

Покажем, что у звезды, давление вещества в которой определяется нерелятивистским вырожденным электронным газом, имеет место обратное соотношение масса–радиус. Из уравнения гидростатического равновесия следует, что давление в центре $P_c \sim (GM/R)\rho \sim GM^{2/3}\rho^{4/3}$. Приравнивая это выражение к давлению нерелятивистского вырожденного электронного газа $P_e = K_{5/3}\rho^{5/3}$, находим, что радиус $R \sim (M/\rho)^{1/3}$ должен зависеть от массы как $R \sim K_{5/3}M^{-1/3}$, в отличие от стационарных звезд главной последовательности, радиус которых увеличивается с массой ($R \sim M^{0.8}$).

Радиус типичного белого карлика с массой Солнца равен примерно $10^{-2}R_\odot$. Обратная зависимость масса–радиус для белых карликов полностью подтверждается наблюдениями. Отметим, что для более тяжелых фермионов — нейтронов — аналогичная вырожденная конфигурация (нейтронная звезда), должна иметь радиус примерно в $m_n/m_e \sim 2000$ раз меньше, т. е. порядка нескольких километров. Это следствие соотношения $K_{5/3} \sim m_n^{-1}$ (см. (6.2)).

6.3. Предел Чандрасекара и фундаментальная масса звезды

При увеличении плотности вещества до значений $\rho > 10^6$ г/см^3 вырожденные электроны становятся релятивистскими, их давление