

новится сопоставимой со скоростью света, и это немного ослабляет степень зависимости давления от плотности. Более медленный рост энергии релятивистских электронов с возрастанием их импульса $E_e \sim p_{Fc}$ приводит к более мягкой зависимости давления от плотности:

$$P_e \sim \rho^{4/3}.$$

В общем случае надо рассматривать давление газа как состоящее из двух компонент: $P_g = P_{th} + P_e$, где P_{th} — тепловое давление, обусловленное хаотическим движением невырожденных частиц. Для идеального ионизованного газа оно связано в равной мере как с протонами, так и электронами, но в случае вырожденного газа электронная составляющая давления P_e значительно превосходит P_{th} .

Давление вырожденного нерелятивистского (или слаборелятивистского) электронного газа удержит белые карлики от сжатия, даже если их температура будет сколь угодно низкой: движение электронов в звезде не прекратится и при абсолютном нуле (как оно не прекращается в обычных атомах любого вещества).

Покажем, что у звезды, давление вещества в которой определяется нерелятивистским вырожденным электронным газом, имеет место обратное соотношение масса–радиус. Из уравнения гидростатического равновесия следует, что давление в центре $P_c \sim (GM/R)\rho \sim GM^{2/3}\rho^{4/3}$. Приравнявая это выражение к давлению нерелятивистского вырожденного электронного газа $P_e = K_{5/3}\rho^{5/3}$, находим, что радиус $R \sim (M/\rho)^{1/3}$ должен зависеть от массы как $R \sim K_{5/3}M^{-1/3}$, в отличие от стационарных звезд главной последовательности, радиус которых увеличивается с массой ($R \sim M^{0.8}$).

Радиус типичного белого карлика с массой Солнца равен примерно $10^{-2}R_{\odot}$. Обратная зависимость масса–радиус для белых карликов полностью подтверждается наблюдениями. Отметим, что для более тяжелых фермионов — нейтронов — аналогичная вырожденная конфигурация (нейтронная звезда), должна иметь радиус примерно в $m_n/m_e \sim 2000$ раз меньше, т. е. порядка нескольких километров. Это следствие соотношения $K_{5/3} \sim m_n^{-1}$ (см. (6.2)).

6.3. Предел Чандрасекара и фундаментальная масса звезды

При увеличении плотности вещества до значений $\rho > 10^6$ г/см³ вырожденные электроны становятся релятивистскими, их давление

P_e стремится к $K_{4/3}\rho^{4/3}$, и из уравнения гидростатического равновесия (см. выше) находим, что равновесие звезды возможно только при одной массе (предел Чандрасекара)

$$M_{Ch} \approx (K_{4/3}/G)^{3/2}.$$

Точное значение предела Чандрасекара для релятивистского вырожденного электронного газа при нулевой температуре

$$M_{Ch} = 5.83M_{\odot}Y_e^2 \approx 1.46M_{\odot}(Y_e/0.5)^2, \quad (6.3)$$

где Y_e — число электронов, приходящееся на один нуклон, и для элементов тяжелее гелия $Y_e \leq 0.5$ (для ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, например, $Y_e = 26/56$). Если масса белого карлика превышает M_{Ch} , то он будет безудержно сжиматься до плотности атомных ядер, когда не только электронный, но и нейтронный газ станет вырожденным.

Пример. Покажем, что предельная масса Чандрасекара может быть выражена только через фундаментальные мировые постоянные — массу протона и планковскую массу. Импульс Ферми вырожденных электронов при нулевой температуре определяется только их концентрацией, которая выражается через плотность вещества ρ и лептонный параметр Y_e :

$$p_F \sim h(Y_e\rho/m_p)^{1/3},$$

где выражение в скобках есть просто концентрация электронов. Тогда давление вырожденного газа релятивистских электронов:

$$P_{rel} \sim (Y_e \frac{\rho}{m_p}) \mathcal{E}_F \sim (Y_e \frac{\rho}{m_p}) p_{FC} \sim \frac{ch}{m_p^{4/3}} (Y_e \rho)^{4/3} = K_{4/3} \rho^{4/3},$$

где коэффициент

$$K_{4/3} \sim \frac{chY_e^{4/3}}{m_p^{4/3}}$$

и, таким образом, предельная масса

$$M_{Ch} \sim \left(\frac{ch}{Gm_p^{4/3}} \right)^{3/2} \cdot Y_e^2 = m_p \left(\frac{m_{Pl}}{m_p} \right)^3 \cdot Y_e^2,$$

где $m_{Pl} = \sqrt{\hbar c/2\pi G} \approx 10^{19}$ ГэВ $\approx 10^{-5}$ г — планковская масса.

При более высоких плотностях гравитационному сжатию может противостоять давление вырожденных нейтронов (нейтронная звезда). Как и для белого карлика, можно получить предельную массу для нейтронной звезды (иногда ее называют пределом Оппенгеймера–Волкова (*R. Oppenheimer, G. Volkoff*)), которые в 1939 году рассмотрели строение простейшей нейтронной звезды, состоящей только из вырожденных нейтронов). В отличие от предела Чандрасекара для белых карликов, который зависит только от химического состава вещества (этим определяется лептонное число Y_e), предел Оппенгеймера–Волкова зависит от плохо известного уравнения состояния материи при ядерных плотностях $\rho > 10^{14}$ г/см³. Современные расчеты показывают, что для различных уравнений состояния этот предел находится в диапазоне $\sim 1.5\text{--}3M_\odot$, и его определение является одной из фундаментальных задач физики нейтронных звезд.

6.4. Вырождение вещества в центре у звезд различных масс

Основная причина, приводящая к различию эволюции звезд разных масс после главной последовательности, состоит в неодинаковых физических условиях в ядре звезды. Эти различия, как мы сейчас увидим, связаны с главным макроскопическим параметром нормальной звезды — ее полной массой M .

Рассмотрим звезду сразу после окончания горения водорода в ядре, т. е. по прошествии времени t_n после попадания звезды на главную последовательность. В соответствии с теоремой вириала для ядра звезды, состоящей из идеального одноатомного газа, $2E_{th} + U = 0$, ее тепловая энергия $E_{th} = 3/2\mathcal{R}M\bar{T} \sim -1/2U \sim GM^{5/3}\rho^{1/3}$ (здесь \mathcal{R} — универсальная газовая постоянная). Так как звезда продолжает излучать, а ядерное топливо израсходовано, ее полная энергия $E_{tot} = \frac{1}{2}U \sim -GM^{5/3}\rho^{1/3}$ уменьшается (оставаясь отрицательной!) и при постоянной массе должна увеличиваться средняя плотность и температура³. Если бы газ все время оставался идеальным, температура и плотность в центре возрастали бы при сжатии до тех пор, пока не создадутся условия для загорания более тяжелых элементов в ядре звезды (см. выше).

³Рост температуры в центре при потерях энергии на излучение является следствием отрицательной теплоемкости звезды из невырожденного газа.