ГРАВИТАЦИЯ

Несмотря на то, что гравитационное взаимодействие является самым слабым из известных взаимодействий в природе, универсальность действия гравитации определяет ее особую роль для астрономических объектов и для Вселенной в целом.

Ниже мы приводим наиболее важные общие соотношения, используемые в основной части курса.

А.1. Гравитационная энергия

Найдем потенциальную энергию взаимного притяжения тел в системе, состоящей из N точечных масс (например, скопление звезд, $N \approx 10^6$). В пределе больших N (например, для типичной звезды характерное число барионов, вносящих вклад в полную массу звезды, $N \approx 10^{57}$) удобнее пользоваться непрерывным распределением плотности $\rho(r)$. В ньютоновском случае гравитационный потенциал на расстоянии r от малого тела массы m есть

$$\phi = -\frac{Gm}{r}, \tag{A.1}$$

где $G \approx 6.67 \cdot 10^{-8}(\text{см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2)$ — постоянная тяготения Ньютона. Для N точечных масс

$$U_g = -\sum_{i>k}^{N} \frac{Gm_i m_k}{r_{ik}} = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{k \neq i} \frac{Gm_i m_k}{r_{ik}} \tag{A.2}$$

(пара точек m_i, m_k учитывается только один раз, и во втором равенстве множитель $1/2$ стоит для исключения повторного суммирования). Перепишем эту энергию иначе, используя понятие гравитационного потенциала. Для этого просуммируем потенциальные энергии, создаваемые всеми массами. В k-й точке имеем

$$\phi_k = -\sum_{i \neq k}^{N} \frac{Gm_i}{r_{ik}},$$

откуда

$$U_g = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \phi_k m_k = \frac{1}{2}\int \phi dm, \tag{A.3}$$

где второе равенство получается при предельном переходе к непрерывному распределению массы. В случае сферически-симметричного распределения массы с плотностью $\rho(x)$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(x) x^2 dx.$$

На расстоянии r от центра потенциал создается массой внутри r и наружными слоями:

$$\phi(r) = -\frac{Gm(r)}{r} - \int_{m(r)}^{M} \frac{Gdm}{r'(m)} \tag{A.4}$$

(верхний предел во втором интеграле определяет полную массу тела $M = 4\pi \int_0^R \rho(x)x^2 dx$ с радиусом R). Тогда

$$U_g = \frac{1}{2} G \int_0^M dm \left[-\frac{m}{r(m)} - \int_m^M \frac{dm}{r'(m)} \right]. \tag{A.5}$$

Обозначим $f(m) = \int_m^M dm/r(m)$ и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^M f(m) dm = mf|_0^M - \int_0^M mdf = -\int_0^M mdf = \int_0^M \frac{mdm}{r'(m)}.$$

Интеграл от второго слагаемого в (A.5) в точности равен интегралу от первого.

Окончательно получаем для гравитационной энергии сферически симметричного распределения массы

$$U_g = -G \int\limits_0^M \frac{mdm}{r(m)}, \tag{A.6}$$

где переход между переменной массой m и радиусом r осуществляется по формуле

$$dm(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr.$$

Физический смысл выражения (А.6) ясен: при переносе из бесконечности элемента массы dm на расстояние r от центра тела с массой $m(r)$ должна освобождаться гравитационная энергия связи $\Delta E = |\phi(r)|dm = Gm(r)dm/r$.

Для однородного шара с плотностью ρ формула (А.6) дает

$$U_g = -\frac{16\pi^2}{15} G\rho^2 R^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \tag{A.7}$$

Это важный результат, который показывает, что гравитационная энергия самогравитирующего тела (системы тел) пропорциональна квадрату массы тела (системы) и обратно пропорциональна его размеру.

А.2. Время свободного падения

Важной характеристикой гравитирующих систем является время свободного падения, или *динамическое время*. По определению, это время, за которое частица, подверженная только гравитационному ускорению со стороны точечной массы M, достигает этой массы из состояния покоя на расстоянии R от тяготеющего центра. За это же время формально произойдет сжатие шара массы M с радиусом R в точку, если мгновенно «отключить» все силы, кроме силы притяжения (например, гравитационный коллапс звезды).

Пусть R_0 и ρ_0 — начальные значения радиуса и плотности шара массы M (t=0). Уравнение движения точки на границе коллапсирующего шара

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}. \tag{A.8}$$

Из уравнения движения получаем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = const = -\frac{GM}{R_0}. \tag{A.9}$$

Полное время свободного сжатия t_{ff}, за которое точка на поверхности шара пройдет путь от $R = R_0$ до 0 (на практике — время, за которое выполняется условие $R \ll R_0$) определяется из уравнения

$$\int \left(\frac{dR}{dt'}\right) dt' = -R_0,$$

где интеграл берется от $t = 0$ до $t = t_{ff}$. Результат интегрирования:

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}, \tag{A.10}$$

где начальная плотность $\rho_0 = M/(4/3\pi R_0^3)$. Время свободного сжатия (коллапса) определяется только *начальной плотностью* сжимающегося тела (например, облака газа на стадии формирования протозвезды).

А.3. Теорема вириала

Для гравитационно-связанных систем можно сделать несколько простых и полезных оценок, связывающих их массу, размер и характерные времена или скорости движения их составных частей. Эти оценки основаны на применении *теоремы вириала* для механических систем (см. любой курс механики). Эта теорема в несколько измененном виде также применима и к газообразным звездам (см. раздел «Стационарные звезды» в основной части курса). Теорема вириала устанавливает связь между средним по времени значением кинетической энергии (как для одной частицы, так и для всей системы в целом) и потенциальной энергией всей системы. Она применима как на микроскопическом уровне для движения частиц в атомах, так и на масштабах звезд и галактик.

Согласно теореме вириала, для среднего (по времени) движения частиц в поле сил с гравитационным потенциалом $\sim 1/r$,

$$2\langle E_k \rangle = -\langle U_g \rangle. \tag{A.11}$$

Подчеркнем, что теорему вириала можно применять только для *средних по времени* значений кинетической и потенциальной энергии, то есть время устойчивого существования системы должно превышать время усреднения (например, в случае скопления звезд это характерное время пересечения системы, для периодических движений — время одного оборота и т. д.).

Теорема вириала и энергия связи самогравитирующей системы. В соответствии с теоремой вириала полная энергия устойчивого самогравитирующего тела (системы тел) есть (значки усреднения по времени опускаем):

$$E = E_k + U_g = \frac{1}{2}U_g = -E_k < 0, \qquad \text{(A.12)}$$

то есть энергия связи такого тела (системы) порядка его гравитационной энергии; она пропорциональна квадрату массы тела (системы) и обратно пропорциональна размеру тела (системы).

Теорема вириала и отрицательная теплоемкость самогравитирующих систем. Другое важное свойство стационарных самогравитирующих систем, вытекающее из соотношения (А.12): уменьшение полной энергии приводит к увеличению кинетической энергии системы. Если тепловая энергия тела связана с кинетической энергией движения составляющих его частиц (например, звезда из идеального невырожденного газа), то отдача тепла (излучение электромагнитной энергии звездой) приводит к увеличению тепловой энергии. Это так называемое свойство *отрицательной теплоемкости* гравитационно-связанных систем. Именно из-за этого свойства энерговыделение в ядерных реакциях в недрах нормальных звезд не носит характер взрыва.

Теорема вириала и взаимосвязь пространственных и временных масштабов гравитационно-связанных систем. Широко распространенный пример «астрофизического» применения теоремы вириала состоит в оценке скорости движения пробных частиц с массой $m \ll M$ в гравитацинно-связанной системе с полной массой M и характерным размером R (в качестве R можно взять среднее расстояние частиц от центра масс системы). В этом случае из (А.11) получаем оценку средней скорости движения масс на расстоянии R

$$v^2 \simeq \frac{GM}{R}. \qquad \text{(A.13)}$$

Нетрудно видеть, что эта оценка точно равна круговой кеплеровской скорости на расстоянии R от центра тяготеющего тела с массой M. Несмотря на видимую простоту, полученное соотношение может применяться в очень разных случаях — например, дает время «пролета» частицы $t = R/v \sim \sqrt{R^3/GM}$, которое с точностью до численного коэффициента порядка 1 есть время свободного падения $t_{ff} \sim 1/\sqrt{G\rho}$.

Теорема вириала и оценка температуры газа в скоплениях галактик. Соотношением (A.13) можно воспользоваться для оценки температуры газа в скоплениях галактик: средняя кинетическая энергия одноатомного идеального газа $m\langle v^2\rangle/2 = 3/2kT$, откуда следует

$$kT_{vir} \sim \frac{GMm_p}{R} \tag{A.14}$$

(здесь в качестве массы частицы взяли массу протона m_p, так как водород является самым распространенным элементом). Для скоплений галактик с массой порядка $10^{13}M_\odot$ и диаметром несколько Мпк оценка вириальной температуры дает $T_{vir} \sim 10^6$ K — при таких температурах межгалактический газ находится в состоянии плазмы и светится в основном в рентгеновском диапазоне за счет свободно-свободного (тормозного) излучения. Таким образом, рентгеновское излучение межгалактического горячего газа является независимым индикатором полной массы тяготеющего вещества в скоплениях галактик. Во всех случаях обнаруживается, что определенная таким образом полная масса скопления существенно (примерно на порядок) больше, чем масса всего светящегося вещества, включающего звезды в галактиках и сам излучающий в рентгене межгалактический газ. Это одно из главных наблюдательных указаний на наличие гравитирующей скрытой массы (темной материи) во Вселенной.

A.4. Квадрупольная формула для гравитационного излучения от двойной звезды

Приведем простой физический вывод знаменитой квадрупольной формулы Эйнштейна для гравитационного излучения от двойной звездной системы.

Будем считать звезды точками M_1, M_2 на круговой орбите с радиусом a. В этой постановке (задача двух тел И. Кеплера) звезды движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с радиусами $a_1 = m_2/M$ и $a_2 = m_1/M$, где $M = m_1 + m_2$ — полная масса системы. Период обращения T связан с полной массой M и большой полуосью относительной орбиты $a = a_1 + a_2$ через третий закон Кеплера:

$$\Omega^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{a^3}\,, \tag{A.15}$$

где G — постоянная тяготения Ньютона.

В задаче Кеплера сохраняется полная энергия

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GM_1M_2}{a} \tag{A.16}$$

и орбитальный момент импульса системы

$$\mathcal{L} = \mu\Omega a^2 \,, \tag{A.17}$$

где

$$\mu \equiv \frac{M_1M_2}{M} \tag{A.18}$$

есть приведенная масса.

В рамках ньютоновской физики скорость света c бесконечна, поэтому никакого излучения нет. Однако конечность величины c приводит в электродинамике к появлению волновой зоны R_l вокруг ускоренно движущегося заряда, внутри которой поля можно рассматривать как статические, а за пределами которой ($r \gg R_l$) в амплитуде поля преобладают члены $A \sim 1/r$. Например, для заряда, совершающего колебательные движения с частотой ω, радиус волновой зоны $R_l \sim c/\omega$. Наличие в амплитуде поля членов, уменьшающихся обратно пропорционально расстоянию r от источника, приводит к тому, что поток энергии поля ($S \sim A^2$), проинтегрированный по поверхности сферы на расстоянии r, отличен от нуля ($Sr^2 \sim A_0^2 \neq 0$) и представляет собой потери энергии на излучение в низшем мультипольном приближении. В электродинамике это есть дипольное излучение, роль амплитуды поля играет напряженность электрического или магнитного поля, а поток энергии записывается через вектор Пойнтинга.

Зависимость гравитационного ускорения от радиуса $g \sim 1/r^2$ схожа с кулоновским законом для электрических зарядов. В гравитации, в отличие от электромагнетизма, нет зарядов с противоположными знаками — все массы создают поле притяжения. Роль амплитуды поля также нельзя отнести к ускорению g. В сочетании с принципом постоянства скорости света во всех системах отсчета (что оказывается достаточным для электродинамики), принцип эквивалентности гравитационной и инертной массы приводит к теории, в которой роль амплитуды поля играют приливные ускорения, то есть, грубо говоря, разность ускорений свободного падения в соседних точках пространства. В общем случае для описания поля тяготения ньютоновского потенциала ϕ оказывается недостаточно. Как и в электромагнетизме, при ускоренном движении тел (но не при всяком — одного ускоренного движения тел не хватает!) в случае гравитации может возникнуть излучение, однако низший порядок излучения должен быть квадрупольным, а не дипольным, так как дипольный момент изолированной системы тяготеющих тел постоянен. Этих представлений уже достаточно для оценки по порядку величины гравитационного излучения от двойной звезды.

Внутри волновой зоны $r < R_l \sim c/\Omega$ поле статических приливных ускорений от компонентов двойной системы, усредненное за один орбитальный оборот, описывается (с точностью до численного множителя) формулами:

$$A_1 \sim \frac{GM_1}{r^3}a_1 \sim \frac{G\mu}{r^3}a\,,$$

$$A_2 \sim \frac{GM_2}{r^3}a_2 \sim \frac{G\mu}{r^3}a\,,$$

где μ — приведенная масса.

Вне волновой зоны следует ожидать появление «радиационных» членов $\sim 1/r$, поэтому «сшивая» амплитуды на границе волновой зоны, можно было бы ожидать

$$A_{GW} \sim \frac{G\mu}{rR_l^2}a \sim \frac{G\mu}{rc^2}\Omega^2 a\,.$$

Однако несложно видеть, что это не так: волна поля приливных ускорений от движущейся массы M_1 запаздывает по фазе по сравнению с волной от массы M_2, что приводит к интерференции. Поэтому правильной оценкой будет сумма двух волн с учетом фазовой задержки $\Delta\phi \sim (a_1 + a_2)\Omega/c \sim a/\lambda_{GW}$, где $\lambda_{GW} = \pi c/\Omega = cT/2$ — длина волны гравитационного излучения от двойной системы (квадрупольный характер излучения проявляется в том, что период колебаний волны равен половине орбитального периода). Имеем:

$$A_{GW} \sim A_2 - A_1 \sim \frac{G\mu}{rc^2}\Omega^2 a e^{-i\omega_{GW}t} - \frac{G\mu}{rc^2}\Omega^2 a e^{-i(\omega_{GW}t - \Delta\phi)}.$$

Расписывая экспоненты для малой разности фаз и учитывая, что $\omega_{GW} = 2\Omega$ для частоты гравитационной волны от двойной системы на круговой орбите, получаем выражение для амплитуды волны (в системе единиц $G = c = 1$):

$$A_{GW} \sim \frac{\mu}{r}\Omega^2 a\Delta\phi \sim \frac{\mu}{r}\Omega^3 a^2.$$

Темп потери энергии двойной системы за один орбитальный оборот на излучение гравитационных волн дается выражением:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{GW} \sim A_{GW}^2 r^2 \sim \mu^2 \Omega^6 a^4 \sim \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5}, \tag{A.19}$$

где в последнем равенстве учтен третий закон Кеплера и восстановлены нужные степени при G и c для получения правильной размерности. Точное выражение для потерь энергии системой двух точечных масс с круговой орбитой на излучение гравитационных волн в квадрупольном приближении (знаменитая квадрупольная формула Эйнштейна)

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{GW} = -\frac{32G^4}{5c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5}. \tag{A.20}$$

А.5. Вывод формулы для эпициклической частоты

Пусть тело движется по круговой орбите радиусом r_0 с угловой скоростью Ω_0 в осесимметричном гравитационном поле, создаваемом центральной массой (неважно, точечной или распределенной в пространстве). Удельный угловой момент тела $\mathcal{L} = \Omega r^2$, а ускорение движения направлено к центру и равно $-\partial\Phi/\partial r$. Перейдем в систему отсчета, равномерно вращающуюся со скоростью Ω_0, и рассмотрим движение тела после того, как ему сообщили небольшую радиальную скорость много меньшую круговой. Во вращающейся системе отсчета движение тела в радиальном направлении происходит в эффективном потенциале

$$\Phi_{eff} = \Phi(r) + \mathcal{L}^2/2r^2 \tag{A.21}$$

(см. Ландау, Лифшиц, «Механика»). Поскольку $\Phi(r)$ — величина отрицательная, потенциал Φ_{eff} на расстоянии $r = r_0$ проходит через минимум, который соответствует устойчивому движению тела по окружности. Радиальное ускорение тела в этом потенциале составит:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}.$$

В точке минимума потенциала, соответствующей круговой орбите, $\dfrac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} = 0$, поэтому $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial r} = r_0 \Omega^2(r_0)$, где $\Phi(r_0) \equiv \Phi_0$. Введем малое приращение $\Delta r \ll r_0$ и запишем измененные значения слагаемых $\dfrac{d^2r}{dt^2}$, используя первые (линейные) члены разложения функций:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \simeq \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r_0} + \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right|_{r_0} \cdot \Delta r\,, \tag{A.22}$$

$$\frac{\mathcal{L}^2}{r^3} = \frac{\mathcal{L}^2}{(r_0+\Delta r)^3} \simeq \frac{\mathcal{L}^2}{r_0^3} \cdot \left(1 - 3\,\frac{\Delta r}{r_0}\right)\,. \tag{A.23}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \Omega^2 + 2r\Omega\,\dfrac{d\Omega}{dr}$, получаем:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(4\Omega^2 + 2r\Omega\,\frac{d\Omega}{dr}\right) \cdot \Delta r\,. \tag{A.24}$$

Мы пришли к уравнению для гармонических колебаний относительно положения равновесия $r = r_0$ с частотой

$$\varkappa = 2\Omega\left(1 + \frac{r}{2\Omega}\frac{d\Omega}{dr}\right)^{1/2}\,. \tag{A.25}$$

Эта частота называется *эпициклической*. В случае кеплеровского движения в поле точечной массы, когда возмущенной орбитой является эллипс, $\varkappa = \Omega_0$. В общем случае, для галактик $\varkappa > \Omega_0$, но всегда остается одного порядка с ней. При этом траектории звезд могут быть незамкнутыми кривыми.