МЕТРИКА ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА

Точный математический вывод метрики (квадрата элемента расстояния) для однородных изотропных пространств различной размерности можно найти в руководствах по геометрии (например, Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко «Современная геометрия», М.: Наука, 1986) или для 3-мерного пространства — в монографии С. Вейнберга «Гравитация и космология». Здесь мы приведем наглядный вывод, основываясь на идее «вложения» n-мерного пространства в пространство размерности на единицу выше.

Рассмотрим 4-мерную сферу радиуса A. Тогда трехмерная «поверхность» этой сферы будет представлять собой трехмерное пространство постоянной положительной кривизны. Уравнение 4-мерной сферы записывается в виде:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = A^2\,.$$

Элемент расстояния в 4-мерном пространстве равен:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2\,.$$

Чтобы перейти к элементу расстояния на поверхности сферы, исключим из этого выражения «лишнюю» координату (скажем, x_4)

$$x_4 = \sqrt{A^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,, \qquad \text{(E.1)}$$

дифференциал которой есть

$$dx_4 = -\frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)}{x_4}\,. \qquad \text{(E.2)}$$

Введем в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, описывающем «поверхность» 4-мерной сферы, обычные сферические координаты r, θ, ϕ:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

с элементом длины

$$dr^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{r^2} \,. \tag{E.3}$$

Из сравнения (E.1), (E.2) и (E.3) находим:

$$dx_4^2 = \frac{r^2 dr^2}{A^2 - r^2} \,.$$

Тогда для элемента dl^2 на поверхности 4-мерной сферы получаем:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{r^2 dr^2}{A^2 - r^2} \,.$$

Так как в 3-мерных сферических координатах

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) \,,$$

окончательно выводим метрику пространства положительной постоянной кривизны

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/A^2} + r^2(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) \,. \tag{E.4}$$

Заменой координат $r = A\sin\chi$ эту метрику можно привести к эквивалентному виду

$$dl^2 = A^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2)] \,. \tag{E.5}$$

Это выражение наглядно показывает, что пространственная кривизна, определяемая как квадрат радиуса сферы, касательной в данной точке поверхности, в случае 4-мерного пространства с постоянной положительной кривизной есть величина, обратная квадрату радиуса 4-мерной сферы: $k = 1/A^2$.

Метрику пространства отрицательной постоянной кривизны (пространство Лобачевского) можно получить, проделав следующее преобразование: $A \to iA$, тогда $A^2 \to -A^2$, $\sin \to \mathrm{sh}$ и

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/A^2} + r^2(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) = A^2[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2)] \,. \tag{E.6}$$

(В последнем равенстве мы сделали замену переменных $r = A\mathrm{sh}\chi$). Пространственная кривизна есть величина, обратная квадрату радиуса 4-мерной псевдосферы: $k = -1/A^2$.