Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В основе теории строения и эволюции звезд лежит теория тяготения. В настоящее время известно, что закон тяготения, открытый Ньютоном в XVII в., неприменим в сильных гравитационных полях, и современной теорией, описывающей гравитационное взаимодействие, является общая теория относительности (ОТО), созданная А.Эйнштейном в 1916 г. Однако в пределе слабых гравитационных полей теория тяготения Эйнштейна сводится к теории тяготения Ньютона.

Наиболее простой характеристикой гравитационного поля является максимальная скорость движения, которую могут достичь частицы, свободно падая из “бесконечности” в этом поле. Для гравитационного поля Земли скорость свободного падения у поверхности достигает 11 км/с, для Солнца и других обычных звезд эта величина порядка сотен и даже тысяч км/с. Тем не менее для обычных звезд она составляет малую часть скорости света c (к тому же поправки на релятивистские эффекты, как правило, пропорциональны v^2/c^2). В этом смысле гравитационные поля звезд являются слабыми (нерелятивистскими), и теория тяготения Ньютона для этих объектов с достаточной степенью точности вполне пригодна. В дальнейшем, когда мы перейдем к изучению конечных фаз эволюции звезд, мы встретимся с небесными телами — нейтронными звездами и особенно черными дырами, для которых $v \sim c$, и полное описание их свойств возможно с помощью только ОТО.

§ 1.1. Энергия взаимодействия, силы, ускорения, постоянная тяготения, отличие гравитационного взаимодействия от других типов взаимодействия

Энергия гравитационного взаимодействия между двумя точечными массами, удаленными на расстояние r_{12},

$$U_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \, .$$

Именно такую по величине энергию нужно затратить, удаляя на бесконечность одну массу от другой, если начальное расстояние между массами равно r_{12}. Гравитационная сила, действующая со стороны второй частицы на первую,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \; .$$

По второму закону Ньютона ускорение первого тела

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \frac{Gm_2}{r_{12}^2} \; .$$

Отметим, что величина ускорения не зависит от массы m_1, т.е. гравитационное поле совершенно одинаково действует на различные тела. В этом коренное отличие гравитационного взаимодействия от других типов универсальных взаимодействий. В ньютоновской теории сила тяготения зависит от расположения тел в данный момент, конечная скорость (равная c) передачи гравитационного взаимодействия не учитывается.

Везде в этих формулах фигурирует коэффициент G — константа гравитационного взаимодействия, $G = 6,7 \cdot 10^{-8}$ см^3/г $\cdot$ с^2 $\;(= 1/(15 \cdot 10^6))$. С очень большой точностью известно, что сила взаимодействия между двумя точечными массами пропорциональна r^{-2} — это подтверждается наблюдениями движения планет солнечной системы. Величину G можно определить только лабораторным путем (опыт Кавендиша). Точность определения G гораздо меньше, чем большинства других физических констант, это обусловлено малостью гравитационного взаимодействия. Согласно измерениям М.У.Сагитова (ГАИШ) 1978 г. $G = 6.6745 \pm 0.0008$ см^3/г$\cdot$с^2.

Сравним электростатическое и гравитационное взаимодействия двух частиц — электрона и протона :

$$U_{\text{гр}} = -\frac{Gm_pm_e}{r}, \quad U_{\text{эл}} = -\frac{\mathrm{e}^2}{r},$$

$$\frac{U_{\text{гр}}}{U_{\text{эл}}} = \frac{Gm_pm_e}{e^2} \simeq 10^{-39}!$$

Итак, в атомных масштабах роль гравитации ничтожна. Однако несмотря на малую величину сил тяготения, в больших астрономических масштабах (планеты, звезды, галактики, скопления галактик) движение материи определяется главным образом гравитационным взаимодействием. Для электромагнитного взаимодействия характерно наличие зарядов разных знаков (плюс и минус). Электрическое поле, которое создается некоторым распределением зарядов, действует на заряды так, чтобы нейтрализовать начальный заряд, и из-за электронейтральности роль электростатических сил в больших масштабах мала. Гравитационное поле одинаковым образом притягивает все различные типы частиц — частицы и даже античастицы (нет антигравитации!), и сила этого притяжения пропорциональна массе тел, поэтому при переходе к большим масштабам гравитационное взаимодействие является определяющим. Опыт показывает, что частицы с отрицательной массой не существуют. В современной квантовой теории поля предположение о существовании таких частиц создало бы существенные трудности.

§ 1.2. Векторное поле ускорений, теорема Гаусса, гравитационный потенциал, уравнение Пуассона

Введем понятие векторного поля ускорений $\vec{a}$, создаваемых гравитирующими телами. Одна точечная масса m создает поле ускорений :

$$\vec{a} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{Gm}{r^2}\,.$$

Окружим массу m произвольной замкнутой поверхностью (рис.1) и вычислим поток поля $\vec{a}$ через поверхность S :

$$\int\limits_S \vec{a}\,d\vec{S} = \int\limits_S a\ \cos\ \theta\,dS = -\int\limits_S \frac{Gm}{r^2}\ \cos\ \theta\,dS =$$
$$-\int\limits_S \frac{Gm\ \cos\ \theta\,r^2}{r^2\cos\ \theta}d\Omega = -4\pi Gm\,.$$

Здесь θ — угол между $\vec{a}$ и нормалью к поверхности S. Важно отметить, что полный поток оказался независящим от формы поверхности.

Если имеется несколько масс $m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots$, то поле $\vec{a}$ является суперпозицией полей $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots$, создаваемых этими массами

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 +\ \ldots$$

Используя это свойство гравитационного поля и окружая поверхностью S несколько масс, легко получить

$$\int\limits_S \vec{a}\,d\vec{S} = -4\pi GM,$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$.

Можно убедиться, что масса, расположенная вне замкнутой поверхности S, не дает вклада в $\int\limits_S \vec{a}\,d\vec{S}$.

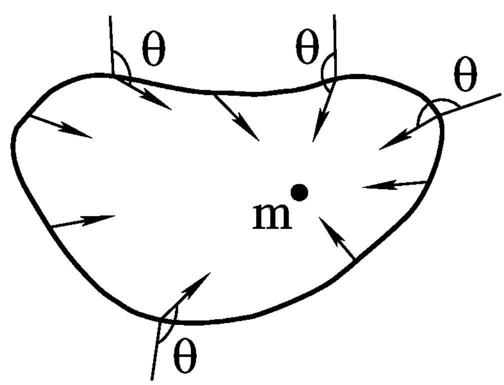


Рис. 1:

Таким образом, полный поток векторного поля $\vec{a}$ равен

$$\int\limits_S \vec{a}\, d\vec{S} = -4\pi G(m_1 + m_2 + m_3 + \ \ldots),$$

причем в сумму входят только те массы, которые лежат внутри S. Это положение называется теоремой Гаусса.

Применим теорему Гаусса к сферическому слою. Пусть S — сфера радиуса r, лежащая внутри этого слоя. Тогда $4\pi r^2 \cdot a = 0$, т.к. внутри S нет масс. Следовательно, внутри сферического слоя[1] $a = 0$. Окружим теперь сферически-симметричную конфигурацию массы M поверхностью S. Тогда $a \cdot 4\pi r^2 = -4\pi GM$ и $a = -GM/r^2$. Итак, сферически-симметричная конфигурация создает поле, эквивалентное полю точечной массы, сосредоточенной в ее центре.

Для малого объема V можно написать

$$\frac{1}{V}\int \vec{a}\, d\vec{S} = -\frac{4\pi Gm}{V}\ ,$$

где интеграл берется по поверхности объема V, а m — масса, заключенная в этом объеме. В пределе при $V \to 0$ отношение m/V есть локальная плотноть ρ, так что получим

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = -4\pi G\ \rho.$$

Сделаем следующий шаг — введем потенциал гравитационного поля согласно условию:

$$\vec{a} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi.$$

Это всегда можно сделать, так как гравитационное поле консервативно: всегда $\int \vec{a}\, d\vec{l}$=0, т.е. $\mathrm{rot}\, \vec{a} = 0$, а это и означает возможность введения потенциала. Теперь имеем

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = -\,\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi = -\Delta\varphi = -4\pi G\ \rho,$$

или

$$\Delta\varphi = 4\pi G\ \rho.$$

Мы получили уравнение Пуассона — основное уравнение теории потенциала. Дифференциальный оператор $\mathrm{div}\,\mathrm{grad} \equiv \Delta$ называют лапласианом. В декартовых координатах

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\ .$$

[1]При этом используем тот факт, что по симметрии $\vec{a}$ может быть направлено только по радиусу. К эллиптической полости это доказательство неприменимо.

В сферических координатах $(r,\ \theta,\ \alpha)$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\ \theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\ \theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\ \theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\ .$$

Нетрудно понять, откуда берется такой вид для Δ. Рассмотрим член $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, который остается в уравнении Пуассона для сферически-симметричной задачи. Очевидно, что $\frac{4\pi r^2\partial\varphi}{\partial r}$ — это поток поля ускорений $\frac{\vec{a}=\partial\varphi}{\partial r}$ через сферу радиуса r. Разность потоков $\vec{a}$ через сферы r и $r+\delta r$ равна $4\pi\delta r\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, объем между сферами — $4\pi r^2\delta r$. Разделив разность потоков $\vec{a}$ на объем, получаем $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}$. Ясно, что в задаче с цилиндрической симметрией из тех же соображений получим $\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ (r — цилиндрический радиус).

Итак, для сферически–симметричного распределения плотности

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G\rho. \tag{1.1}$$

§ 1.3. Сферически-симметричные поля тяготения, полная и текущая массы звезд, эйлеровы и лагранжевы координаты

Рассмотрим тонкий сферический слой с радиусом r, толщиной $\delta \ll r$ и поверхностной плотностью μ [г/см^2]. Найдем силу притяжения со стороны сферы, которая действует на пробную частицу единичной массы, помещенную в какой-либо точке A внутри сферы. Из рис.2 наглядно видно, что силы притяжения двух элементов масс, вырезанных на сфере телесным углом $d\Omega$, одинаковы по величине и противоположны по направлению. Более близкий к точке A элемент dm_1 имеет меньшую массу, и сила притяжения, создаваемая им в точке A,

$$dF_1 = G\frac{dm_1}{r_1^2} = \frac{G\mu dS_1}{r_1^2} = \frac{G\ \mu\ d\Omega}{\cos\ \theta}\ .$$

Так как правая часть этого выражения зависит лишь от величины телесного угла $d\Omega$ и $\cos\ \theta$, которые одинаковы для dm_1 и dm_2, то со стороны dm_2 действует равная по величине сила $dF_2 = -dF_1$. Таким образом, любая пара участков сферы внутри двойного конуса $d\Omega$ дает полную силу, равную нулю, и пробная частица внутри сферы не испытывает силы и ускорения. Этот результат остается в силе и для сферы конечной толщины $(\delta \sim r)$.

Теперь расположим нашу пробную частицу вне сферы (рис. 3). Сила, действующая на частицу в этом случае, равна

$$F = -\frac{GM}{r^2} \tag{1.2}$$

и направлена к центру сферы. Здесь M — полная масса сферической оболочки, r — расстояние от A до центра сферы. Направленность к центру

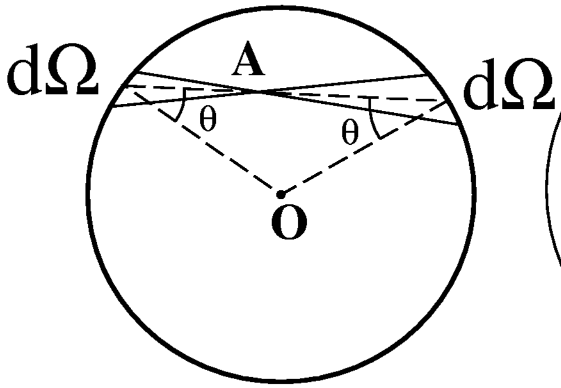


Рис. 2:

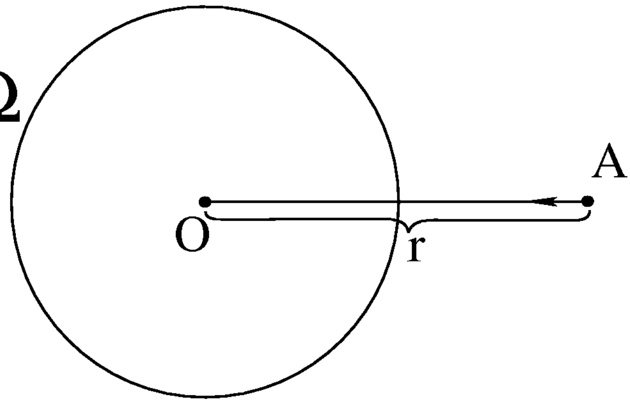


Рис. 3:

сферы очевидна из симметрии задачи, а то что, действие такое же, как от точечной массы, помещенной в центре, можно получить простым интегрированием.

Рассмотрим звезду радиуса R с переменной плотностью $\rho(r)$ и полной массой

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2 dr.$$

Полная сила, действующая на пробную частицу при $r > R$ равна

$$F = -\frac{GM}{r^2}\ ,$$

но внутри звезды $(r < R)$

$$F = -\frac{Gm(r)}{r^2}\ .$$

Величину $m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(q) q^2 dq$ обычно называют текущей массой. Величина $m(r)$ естественно появляется при рассмотрении равновесия звезд.

Решение нестационарных задач сжатия звезд, как и любых гидродинамических задач, можно проводить двумя способами. Выбирая в качестве независимых переменных координату $\vec{r}$ и время t, можно рассматривать изменения физических величин (плотности, давления и т.д.) в какой-либо фиксированной точке пространства (эйлеров подход). Но часто бывает удобно следить за поведением выбранных заранее частиц вещества (лагранжев подход), в этом случае независимыми переменными являются начальные координаты $r_0(t_0)$ и время t, а координата $\vec{r}(t)$ является функцией r_0. Лагранжев подход чаще всего осуществляется в задачах, обладающих какой-либо симметрией движений, например, при сферически-симметричном расширении (или сжатии) звезды. Зададим в начальный момент в качестве лагранжевой координаты расстояние до центра звезды r_0. Сфера с радиусом r_0 содержит вполне определенную часть массы звезды $m(r_0)$, величина которой при сферических движениях не меняется со временем. В этом случае текущая масса $m(r)$ может быть выбрана в качестве независимой (лагранжевой) координаты.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Шар радиуса R имеет постоянную плотность $\rho = \text{const}$. Очевидно, что решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\varphi = kr^2 + \text{const}.$$

Подставляя это решение в уравнение (1.1), получим

$$\Delta\varphi = 6k = 4\pi G\rho$$

и найдем, что

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} G\,\rho\, r^2 + \text{const}\ (r \le R).$$

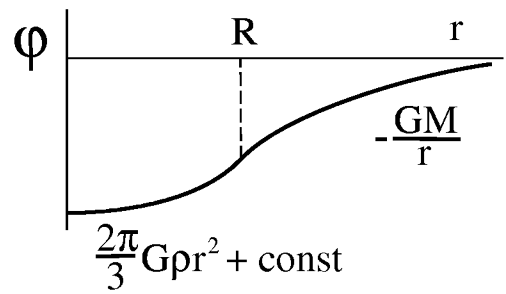


Рис. 4:

Снаружи, при $r > R$, имеем $\varphi = -GM/r$. Значение const находим из условия непрерывности потенциала при $r = R$ (см. рис. 4) (производные при этом сшиваются автоматически):

$$-\frac{GM}{r}\bigg|_R = \frac{2\pi}{3} G\,\rho\, r^2\bigg|_R + \text{const}.$$

Учтем, что $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, и получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} G\,\rho\, r^2 - 2\pi\ G\ \rho\ R^2 = -\frac{GM}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (\text{при } r \le R).$$

2. Теперь предположим, что

$$\rho(r) = \mu\delta\,(r - R)$$

($\delta(r - R)$ — дельта-функция Дирака), т.е. $\rho = 0$ при $r < R$ и $r > R$, а масса

$$M = 4\pi \int\limits_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 4\pi\mu R^2.$$

Очевидно, что μ имеет смысл поверхностной плотности (размерность $[\mu] =$ г/см^2). Поскольку $a = d\varphi/dr = 0$ внутри сферы R, ясно, что $\varphi = \text{const}$ при $r < R$. Снаружи по-прежнему $\varphi = -GM/r$. Сшивая потенциал при $r = R$, получим (рис. 5)

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{R} & (r \le R), \\ -\dfrac{GM}{r} & (r \ge R). \end{cases}$$

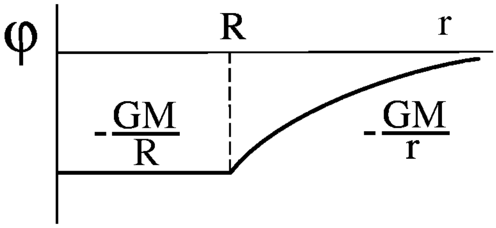


Рис. 5:

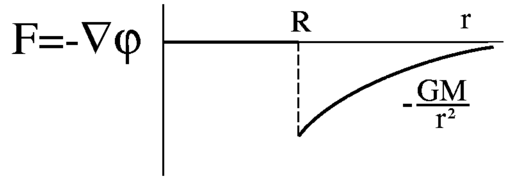


Рис. 6:

Мы видим, что в этом случае $d\varphi/dr$ имеет разрыв (рис. 6). Можно показать, что этот результат совершенно общий: конечная масса, сосредоточенная в бесконечно тонком слое с конечной поверхностью, дает разрыв нормальной производной потенциала:

$$\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_1 - \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_2 = 4\pi G\mu.$$

3. Дано: $\varphi = -GM/r$. Чему равно $\Delta\varphi$? Непосредственное вычисление производных дает нуль везде, за исключением точки $r = 0$. В самом деле

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

и легко убедимся, что $\Delta\varphi = 0$, кроме $x = y = z = 0$, где имеем неопределенность $0/0$.

Еще проще в данном случае вычисление в сферических координатах. Для потенциала, не зависящего от угла $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, и подставляя $\varphi = 1/r$, снова получим $\Delta\varphi = 0$. Однако неправильно было бы отвечать, что везде $\Delta(1/r) = 0$. Такой ответ не верен, так как поток $d\varphi/dr$ через любую поверхность, окружающую начало координат, отличен от нуля и равен $4\pi GM$. Правильный ответ:

$$\Delta\varphi = 4\pi\ Gm\delta_3(\vec{r}).$$

Здесь $\delta_3(\vec{r})$ — трехмерная дельта-функция Дирака. Таким образом, отвечая, что $\Delta\varphi = 0$, нужно добавить: везде, кроме начала координат, где вторые производные от φ стремятся к бесконечности.

4. Рассмотрим теперь общий случай сферически-симметричного распределения плотности $\rho(r)$. Определим, как раньше, текущую массу

$$m(r) = 4\pi\int\limits_0^r \rho(q)q^2dq\,.$$

Интегрируя уравнение Пуассона, последовательно получим

$$\varphi(r) = \int\limits_{\infty}^{r} \frac{d\,\varphi}{dq}\,dq = -\int\limits_{r}^{\infty} \frac{Gm(q)}{q^2}dq = \int\limits_{r}^{\infty} Gm(q)d\left(\frac{1}{q}\right) =$$

$$= \left.\frac{Gm(q)}{q}\right|_{r}^{\infty} - \int\limits_{r}^{\infty} \frac{Gdm(q)}{q} = -\frac{Gm(r)}{r} - G\int\limits_{r}^{\infty} \frac{dm(q)}{q}\,.$$

Смысл полученного выражения для φ легко понять. Первый член — это потенциал сферически-симметричной массы, расположенной внутри сферы радиуса r. Второй член является суммой потенциалов от внешних слоев.

С учетом соотношения для $m(r)$ запишем выражение для потенциала в виде

$$\varphi(r) = -4\pi\,G\left(\frac{1}{r}\int\limits_{0}^{r} \rho(q)q^2dq + \int\limits_{r}^{R} \rho(q)qdq\right).$$

В последнем интеграле мы заменили верхний предел ∞ на R, предполагая, что при $r > R$ плотность $\rho = 0$.

§ 1.4. Энергия гравитационного взаимодействия

Мы видели, что энергия гравитационного взаимодействия U для двух масс m_1 и m_2 равна $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$. На случай N точечных масс выражение для U обобщается следующим образом:

$$U = \sum_{\substack{i,k \\ i>k}}^{N} -\frac{Gm_im_k}{r_{ik}}.$$

При таком определении U каждая пара m_i, m_k входит в сумму только один раз. Введем величину

$$\varphi_k = -\sum_{i\neq k}^{N} \frac{Gm_i}{r_{ik}}\,,$$

что, очевидно, представляет собой гравитационный потенциал, создаваемый в k-той точке всеми остальными массами. Теперь для U можно написать

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varphi_k m_k.$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ появился вследствие того, что каждая пара точек входит в сумму два раза. Это выражение легко обобщить на случай непрерывной среды:

$$U = \frac{1}{2}\int \varphi\, dm = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV$$

(по определению $dm = \rho\, dV$).

Для точечных масс необходимо было отбрасывать энергию самодействия, оговаривая правило суммирования. В сплошной среде самодействие не учитывается автоматически. По порядку величины $dV \sim (dr)^3$, и самодействие элемента dV есть $G(\rho dV)^2/dr \sim (dr)^5$, т.е. величина более высокого порядка, чем энергия взаимодействия с остальными массами, которая $\sim (dr)^3$.

Используем теперь выражение φ для сферически–симметричного распределения $\rho(r)$ и вычислим гравитационную энергию. Имеем:

$$U = \frac{G}{2}\int\limits_0^M dm\, \left\{ -\frac{m}{r} - \int\limits_r^R \frac{dm(q\ )}{q} \right\}. \tag{1.3}$$

Это выражение можно значительно упростить. Введем вспомогательную функцию $f(m) = \int\limits_r^R \frac{dm}{q}$. Очевидно, $f(M) = 0$ и кроме этого

$$\int\limits_0^M f\ (m)\ \ dm = mf|_0^M - \int\limits_0^M mdf = -\int\limits_0^M mdf.$$

Имеем также $df = -dm/q$.

Таким образом, интеграл от первого члена в выражении (3.3) равен интегралу от второго, и окончательно получим

$$U = -G\int\limits_0^M \frac{mdm}{r(m)}.$$

Это выражение проще получить иным путем, рассматривая, какую работу совершают гравитационные силы при наращивании данной конфигурации последовательными слоями. Пусть масса m с радиусом r уже изготовлена. Прибавим к этой массе новый сферический слой dm. Тогда совершенная работа, очевидно, равна $dU = \frac{Gmdm}{r}$ и т.д. В результате получим

$$U = -G\int\limits_0^M \frac{mdm}{r}.$$

§ 1.5. Давление газа. Уравнение равновесия звезды

Для звезды, находящейся в равновесии, сила гравитационного притяжения, действующая на какой-либо элемент массы dm, должна быть скомпенсирована равной по величине и противоположной по направлению силой. Такая уравновешивающая гравитацию сила в звездах обусловлена давлением вещества (точнее, градиентом давления).

В общем случае давление P является величиной, позволяющей описать силу, действующую на выделенный в жидкости или газе объем V произвольной формы со стороны окружающего его вещества, как интеграл по разделяющей поверхности

$$\vec{F} = -\int\limits_S P d\vec{S}, \tag{1.4}$$

где давление P зависит только от состояния вещества на этой поверхности. Вектор $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ($\vec{n}$ — нормаль к элементу поверхности dS) направлен в любой точке наружу от поверхности, поэтому в (1.4) перед интегралом стоит знак минус. Из (1.4) следует размерность давления $[P] = \text{дин}/\text{см}^2$.

Для жидкости, в которой давление однородно ($P = \text{const}$), имеем очевидное выражение для силы, действующей на замкнутую поверхность: $\vec{F} = 0$. Пусть теперь давление неоднородно. В общем случае в малой окрестности некоторой точки, раскладывая в ряд, можно записать:

$$P = P_0 + \vec{r}\nabla P + r_i r_k(\text{вторые производные}) + \cdots . \tag{1.5}$$

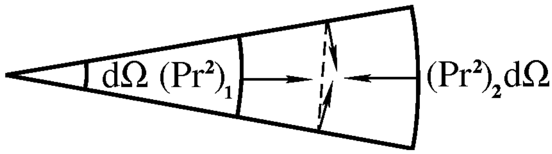
Подставляя (1.5) в (1.4), найдем, что с точностью до величин второго порядка малости сила, действующая на объем dV, ограниченный поверхностью dS, равна $d\vec{F}_P = -\nabla P dV$, т.е. сила давления является объемной силой — она пропорциональна dV и направлена из области большего давления в область меньшего. Масса объема dV равна $dm = \rho\, dV$. Сила гравитационного притяжения, которая является массовой силой, равна $d\vec{F}_g = -\nabla\varphi dm$.

В равновесии для невращающейся звезды эти две силы должны компенсировать друг друга, т.е.

$$d\vec{F} = -\nabla\varphi\, dm - \nabla P dV = 0$$

Окончательно условие механического равновесия записывается в виде

$$\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\varphi = 0.$$



Давление на боковые стенки создает радиальную силу $F_r = 2PrdrdΩ$

Рис. 7:

Для сферически–симметричных звезд уравнение гидростатического равновесия имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + \frac{Gm(r)}{r^2} = 0. \qquad (1.6)$$

Сила гравитационного притяжения направлена к центру звезды. Уравновешивающая сила давления пропорциональна $-\nabla P$, т.е. для поддержания равновесия звезды давление должно с необходимостью монотонно расти от поверхности к центру звезды.

Выделим внутри звезды единичный цилиндрический объем $(dV = dSdr = 1\text{ см}^3, dr = 1\text{ см}, dS = 1\text{ см}^2)$ так, чтобы основания цилиндра были перпендикулярны радиусу. Для такого объема сила, обусловленная давлением, равна $-\frac{dP}{dr}$ [дин/см^3]. Выделим теперь шаровой сектор с раствором телесного угла $d\Omega$ (см. рис. 7). Казалось бы, поскольку сила давления на внешнюю поверхность шарового сектора равна $r^2 P d\Omega$, то результирующая сила давления, действующая на единичный объем этого сектора, равна $-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P\right)$. Не будет ли более правильным подставлять это выражение в (1.6) вместо величины $-\frac{dP}{dr}$? Оказывается нет. При выводе силы, действующей на шаровой сектор, мы не учли давление на боковые поверхности сектора, что дает добавочную силу вдоль радиуса $\frac{P}{r^2}\frac{dr^2}{dr}$. С учетом последнего мы опять приходим к выражению для силы газового давления $-\frac{dP}{dr}$.

В общем случае неизотропного давления следует применять выражение

$$F_r = -\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 P_{rr})}{dr} + \frac{P_{\theta\theta}}{r^2}\frac{dr^2}{dr},$$

где $P_{rr} \neq P_{\theta\theta}$. Для обычных газовых звезд давление изотропно — выполняется закон Паскаля: $P_{rr} = P_{\theta\theta}$ и $F_r = -\frac{dP}{dr}$.

Предположим, что нам известно уравнение состояния в виде $P = P(\rho)$, т.е. давление является функцией только плотности. Зададимся значениями в центре ρ_c и P_c $(r = 0)$. Тогда имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \qquad (1.7)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho\, r^2, \qquad (1.8)$$

решая которую, получаем распределение плотности и давления вдоль радиуса.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения в центре $(r \to 0)$ и на краю звезды $(r \to R)$. При $r \to 0$ получим

$$m \approx \frac{4\pi}{3}\,\rho_c r^3,$$

$$P = P_c - k_1 r^2 = P_c - \frac{2\pi}{3} G {\rho_c}^2 r^2,$$

$$\rho = \rho_c - k_2 r^2 = \rho_c - \left(\frac{\partial P}{\partial\,\rho}\right)^{-1} \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2,$$

т.е. в центре $dP/dr = 0$ и $d\rho/dr = 0$.

На краю звезды имеем $m = M$ и, интегрируя уравнение равновесия (1.7), получим

$$\int \frac{dP}{\rho} = \frac{GM}{r} + \text{const}.$$

Для того чтобы звезда имела определенную внешнюю границу, интеграл $\int dP/\rho$ должен сходиться при $\rho \to 0$. Например, для изотермической атмосферы $P \sim \rho T$ $(T = \text{const})$ интеграл расходится, т.е. изотермическая атмосфера должна быть бесконечна.

Если давление является степенной функцией плотности $P = K\rho^\gamma$, то необходимым (но не достаточным) условием конечности атмосферы является $\gamma > 1$. В этом случае

$$\rho^{\gamma-1} \sim A + \frac{GM}{r}.$$

Из условия $\rho \to 0$ при $r \to R$ получим $A + \frac{GM}{R} = 0$ и

$$\rho^{\gamma-1} \sim M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \sim \frac{M(R-r)}{R^2}, \text{ т.е. } \rho \sim (R-r)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

вблизи края звезды. Для частного, но встречающегося часто случая $\gamma = 4/3$ $(\rho \sim T^3,\ P \sim \rho T \sim \rho^{4/3})$, получим $\rho \sim (R-r)^3$ при $r \to R$.

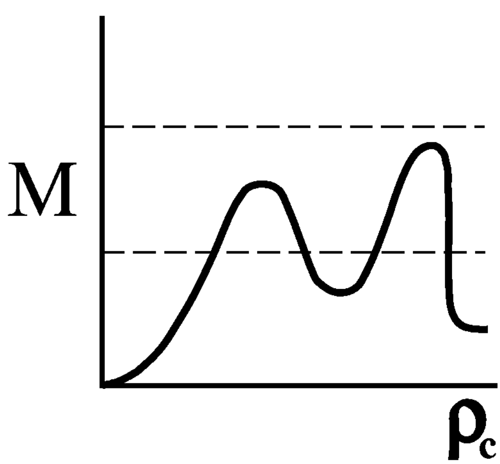


Рис. 8:

При определенном уравнении состояния $P(\rho)$ не всегда можно решить задачу для данной массы (может оказаться, что решений для выбранной массы вообще не существует). Однако, задаваясь центральной плотностью ρ_c, можно найти набор решений с различными массами, т.е. построить кривую $M(\rho_c)$ (рис. 8). После этого уже видно, какие решения соответствуют данной массе, при каких массах существуют решения (т.е. состояния равновесия) и т.п.

Такой же подход применим и в ОТО. Качественно все остается попрежнему: решение можно находить, интегрируя от центра, так как внешние слои не создают ускорения.

§ 1.6. Основы термодинамики звезд

Ограничимся случаем химически однородной звезды. Одной из самых важных термодинамических функций вещества является удельная тепловая энергия E. Пусть E известна как функция удельного объема $v = 1/\rho$ [см^3/г] и удельной энтропии $S : E = E(v, S)$.

По I закону термодинамики $dE = -Pdv + TdS$. Поэтому, зная $E(v, S)$, можно найти и другие термодинамические величины. Например,

$$P = -\left.\frac{\partial E}{\partial v}\right|_S; \quad T = \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_v.$$

При заданной температуре T иногда при расчетах удобно пользоваться свободной энергией системы $F = E - TS$:

$$dF = -Pdv - SdT.$$

Таким образом, $F = F(v, T)$. Однако при исследовании механической устойчивости равновесной звезды важно знать $E(v, S)$, так как процессы теплопроводности в звезде очень медленные и поэтому пульсации происходят адиабатически, т.е. с сохранением энтропии, но не температуры.

Введем еще одну важную термодинамическую функцию — энтальпию $H = E + Pv$

$$dH = TdS + vdP.$$

Если энтропия фиксирована, то $dH|_S = vdP = \frac{dP}{\rho}$. Используя это соотношение, запишем условие равновесия звезды $-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\varphi = 0$ в виде $-\nabla(H + \varphi) = 0$. Итак, для изэнтропических звезд ($S = \text{const}$) условие равновесия есть $H + \varphi = \text{const}$ по звезде. На краю $P = 0$, $\rho = 0$, $H = 0$, поэтому $\text{const} = -\frac{GM}{R}$. Внутри звезды энтальпия является “зеркальным отражением” φ (рис. 9).

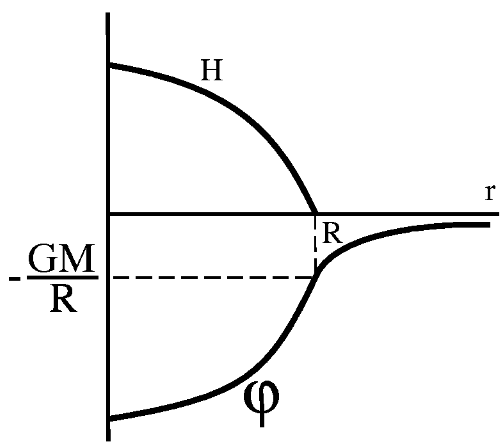


Рис. 9:

Каков физический смысл соотношения $H + \varphi = \text{const}$? Возьмем 1 г холодного вещества на бесконечности и поместим его в звезду на расстоянии r от центра. Работа гравитационного поля при этом равна $\varphi(r)$. Чтобы этот грамм находился в равновесии с веществом звезды, его необходимо нагреть до температуры окружающей среды $T(r)$, придать объем $v(r)$, т.е. совершить работу $E(T, v)$. Кроме этого, необходимо произвести работу Pv, освобождая полость объема v, в которую мы поместим наш элемент. Итак, полная работа равна $\varphi + E + Pv = \varphi + H$. Условие $\varphi + H = \mathrm{const}$ говорит о том, что затраченная работа не зависит от места, в котором мы размещаем элемент вещества.

Вместо того, чтобы брать элемент вещества на бесконечности, мы можем взять его в другом месте звезды. Тогда условие $H + \varphi = 0$ означает, что полная работа при перестановке двух элементов равна нулю, т.е. изэнтропическая звезда находится в безразличном равновесии относительно таких перестановок.

§ 1.7. Вариационный принцип

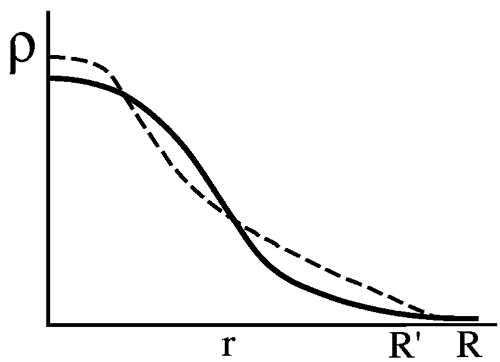


Рис. 10:

В химически однородной звезде необязательно переносить вещество: к тем же результатам относительно устойчивости можно прийти, просто изменяя распределение вещества $\rho(r)$, не меняя при этом взаимного расположения слоев (рис. 10). Можно утверждать, что если равновесие звезды слегка нарушить, то энергия при этом не изменится. Точная формулировка этого утверждения: условие экстремума полной энергии звезды $\mathcal{E}$ совпадает с условием равновесия.

Рассматриваем звезду с произвольным распределением энтропии $S(r)$. Полная энергия звезды $\mathcal{E}$ складывается из тепловой энергии $Q = \int\limits_0^M E(v,S)dm$ и гравитационной энергии $U = -\int\limits_0^M \frac{Gm}{r}\,dm$:

$$\mathcal{E} = \int\limits_0^M E(v,S)dm - G\int\limits_0^M \frac{m}{r}\,dm\,.$$

Найдем условие экстремума $\mathcal{E}$, используя m в качестве лагранжевой координаты. Распределение плотности полностью определено, если задана функция $\rho(m)$. Будем варьировать $r(m)$, т.е. смещать отдельные слои, считая энтропию $S(m)$ фиксированной, при этом у нас будут определены вариации и всех остальных величин. Имеем:

$$\delta U = -G\int\limits_0^M m dm\,\delta\left(\frac{1}{r}\right) = G\int\limits_0^M \frac{m dm}{r^2}\delta r;$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho\, dr = \rho\, d\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right), \quad \text{поэтому } v = \frac{d}{dm}\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right).$$

Тогда $\delta Q = \int\limits_0^M \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_S \delta v\, dm = -\int\limits_0^M P \frac{d}{dm}\left(\delta \frac{4\pi}{3} r^3\right) dm$. Интегрируя по частям с учетом того, что $r(0) = 0$, $P(M) = 0$, получим

$$\delta Q = \int\limits_0^M \delta\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right) \frac{\partial P}{\partial m}\, dm = \int\limits_0^M 4\pi r^2\, \delta r \frac{\partial P}{4\pi r^2 \rho\, \partial r}\, dm = \int\limits_0^M \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}\, \delta r\, dm.$$

В результате

$$\delta \mathcal{E} = \int\limits_0^M dm\, \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{Gm}{r^2}\right] \delta r.$$

Если $\mathcal{E}$ экстремально, то $\delta\mathcal{E} = 0$ при любых $\delta r(m)$, следовательно, из экстремальности $\mathcal{E}$ следует уравнение равновесия

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Чем полезен вариационный принцип? Оказывается, что с помощью этого принципа исследовать устойчивость много проще, чем используя уравнение равновесия. В этом можно убедиться следующим образом. Запишем выражение для полной энергии звезды, не предполагая равенства нулю скоростей движения вещества звезды:

$$\mathcal{E} = \int\limits_0^M \left[E(v,S) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2}\right] dm,$$

где u — скорость элемента массы. Очевидно, что равновесное расстояние (которое всегда соответствует экстремуму энергии) будет устойчивым, если экстремум является минимумом. Действительно, тогда из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с $u = 0$ (но другим $r(m)$), ни тем более с $u^2 > 0$. Следовательно, исследование устойчивости сводится к нахождению условий, при которых вторая вариация энергии $\delta^2\mathcal{E} > 0$.

Помимо исследования устойчивости вариационный принцип позволяет находить приближенные решения для структуры звезды.

§ 1.8. Теорема вириала

Предположим, что уравнение состояния степенное: $P = K\rho^\gamma$. Тогда удельная тепловая энергия $E = \frac{K}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{K}{\gamma-1}v^{-(\gamma-1)}$. Мы знаем, что в равновесии $\delta\mathcal{E} = 0$ при произвольной $\delta r(m)$. Пусть $\delta r = \alpha r$ ($|\alpha| \ll 1$). Такое возмущение описывает подобное (гомологическое) расширение или сжатие звезды. Тогда $v' = (1+3\alpha)v,\ \delta U = -\alpha U,\ \delta Q = -3(\gamma-1)\alpha Q$. Следовательно,

$$\delta\mathcal{E} = -3(\gamma-1)\alpha Q - \alpha U = 0,$$

откуда

$$Q = -\frac{1}{3(\gamma-1)}U$$

(это соотношение и называют теоремой вириала). Для одноатомного газа с $\gamma = \frac{5}{3}$ имеем $Q = -\frac{U}{2},\ \mathcal{E} = \frac{U}{2} = -Q$.

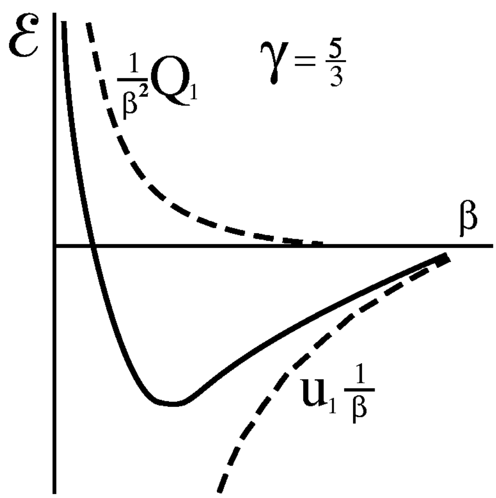


Рис. 11:

Теперь положим $r' = \beta r$, причем не будем считать $|\beta - 1|$ малой величиной, а исходное состояние — равновесным. Обозначим через U_1 и Q_1 соответствующие величиныэнергий исходной модели. Тогда после преобразования $U = \frac{1}{\beta}U_1,\ Q = \frac{1}{\beta^{3(\gamma-1)}}Q_1$ (для степенного уравнения состояния). Если $\gamma = \frac{5}{3}$, то $Q = \frac{1}{\beta^2}Q_1$. Как выглядит в этом случае кривая $\mathcal{E}(\beta)$? При $\beta \to \infty$ асимптотика определяется величиной U, при $\beta \to 0$ — величиной Q (рис. 11). Получаем, что при $\gamma = 5/3$ кривая имеет один и только один минимум, т.е. равновесие устойчиво.

Получим теорему вириала другим способом из уравнения равновесия, причем зависимость $P(\rho)$ может быть произвольной. (Выше при выводе теоремы вириала из вариационного принципа зависимость $P = K\rho^\gamma$ была существенна). Умножим уравнение равновесия (1.6) на r:

$$-\frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r}$$

и проинтегрируем по dm:

$$\int \frac{Gmdm}{r} = -\int \frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}\,dm = -\int \frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}\,4\pi\rho\, r^2 dr =$$
$$= -4\pi P r^3\Big|_0^R + 3\int P\,4\pi r^2 dr = 3\int PdV,$$

т.е.

$$\int \frac{Gmdm}{r} = 3\int PdV$$

теорема вириала при произвольном $P(\rho)$.

При степенном уравнении состояния, используя $P = (\gamma - 1)E\,\rho$, имеем уже известное соотношение $U = -3(\gamma - 1)Q$.

В действительности уравнение состояния не степенное, но для многих оценок полезно знать свойства звезд с таким уравнением состояния. Для степенного уравнения состояния имеется подобие, т.е. достаточно решить задачу при данном γ для одного значения ρ_c, чтобы найти функциональную зависимость $M(\rho_c)$ и $R(\rho_c)$. В систему уравнений

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\,\rho, \quad P = K\rho^\gamma$$

входят размерные константы

$$[G] = \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2},\ [K] = \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2}\left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)^{-\gamma+1},\ [\rho_c] = \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Поэтому, комбинируя $G,\ K,\ \rho_c$ в различных степенях, можно получить массу, радиус и другие характеристики звезды. Эту задачу можно решить формально, составляя систему уравнений типа

$$[R] = \text{см}^1 = [G]^x\,[K]^y\,[\rho_c]^z = \text{см}^\alpha\,\text{г}^\beta\,\text{с}^\delta\,,$$

$$\begin{gathered}\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0,\ \text{т.е.}\\ 3x + (3\gamma - 1)y - 3z = 1,\\ -x + (1 - \gamma)y + z = 0,\\ -2x - 2y = 0;\end{gathered}$$

откуда $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\gamma-2}{2}$, т.е. $R \sim (K/G)^{\frac{1}{2}}\rho_c^{\frac{\gamma-2}{2}}$.

Более наглядно эта связь получается с помощью порядковых оценок:

$$P_c \simeq \frac{GM^2}{R^4}, \quad \rho_c \simeq \frac{M}{R^3}, \quad P_c = K\rho_c^\gamma.$$

Смысл первого соотношения легко понять, если вспомнить, что сила притяжения между двумя половинками звезды $\sim \frac{GM^2}{R^2}$, а давление (сила на единицу площади, пропорциональной R^2) $\sim \frac{GM^2}{R^4}$. Исключая из этих выражений M, имеем выражение для R, а исключая R, находим

$$\frac{P_c}{\rho_c^{4/3}} \sim GM^{2/3} \sim K\rho_c^{\gamma-4/3}, \quad \rho_c \sim \left(\frac{GM^{2/3}}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma-4/3}}.$$

Подчеркнем, что вид кривых $M(\rho_c)$ и $R(\rho_c)$ зависит от безразмерной величины γ, т.е. кривые для разных γ не подобны.