Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИТРОПНЫХ ШАРОВ (ТЕОРИЯ ЛЕЙНА–РИТТЕРА–ЭМДЕНА)

§ 2.1. Уравнение Эмдена

В этой главе мы будем изучать равновесные конфигурации звезд, подчиняющихся степенному (политропному) уравнению состояния

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}},$$

где γ — показатель, n — индекс политропы. Интерес к этому уравнению состояния возник еще в прошлом веке, когда думали, что все звезды полностью конвективны. При этом можно предположить, что энтропия постоянна. Интегрируя термодинамические равенства

$$dE = -Pdv = K\rho^{1+\frac{1}{n}}\,\frac{1}{\rho^2}d\rho = K\rho^{-1+\frac{1}{n}}d\rho,$$

получаем выражение для внутренней энергии

$$E = nK\rho^{\frac{1}{n}} = n\frac{P}{\rho}.$$

Отсюда энтальпия

$$H = E + Pv = E + \frac{P}{\rho} = (n+1)\,\frac{P}{\rho}.$$

В случае идеального газа известно, что (c_v — теплоемкость, $\mathcal{R}$ — газовая постоянная)

$$E = \frac{c_v}{\mu}T, \quad P = \rho\frac{\mathcal{R}T}{\mu} \quad \text{или} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}, \quad E = \frac{c_v}{\mathcal{R}}\,\frac{P}{\rho}.$$

Для одноатомного газа

$$c_v = \frac{3}{2}\mathcal{R} \quad \text{и} \quad n = \frac{3}{2}.$$

То же можно вычислить и для многоатомных газов, но этот случай неинтересен: сейчас мы знаем о звездах несколько больше, чем 100 лет назад.

Введем переменную Θ таким образом, чтобы

$$\rho = \lambda\Theta^n, \quad P = K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\,\Theta^{n+1},$$

$$\text{т.е. имеем } \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\lambda\Theta^n}{\rho_c}, \quad \frac{P}{\rho} = K\lambda^{\frac{1}{n}}\Theta \quad \text{и} \quad H = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\Theta.$$

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью величина Θ пропорциональна температуре. Возьмем условие равновесия в виде

$$\varphi + H = \text{const}$$

и подействуем на него оператором Δ. Лапласиан φ есть $4\pi G\rho$, т.е. $\Delta\varphi = 4\pi G\lambda\Theta^n$, а лапласиан H есть $(n+1)K\lambda^{1/n}\Delta\Theta$, и уравнение равновесия запишется в виде

$$4\pi G\lambda\Theta^n + (n+1)K\lambda^{1/n}\Delta\Theta = 0\,.$$

Будем упрощать полученное соотношение, изменяя масштаб, т.е. вводя переменную ξ через соотношение $r = \alpha\xi$,

$$4\pi G\lambda\Theta^n + \frac{(n+1)K\lambda^{1/n}}{\alpha^2}\Delta_\xi\Theta = 0,$$

где $\Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}$.

Выберем α так, чтобы $4\pi G\lambda = (n+1)K\lambda^{1/n}/\alpha^2$. Тогда уравнение равновесия запишется в виде

$$\Delta_\xi\Theta + \Theta^n = 0\,, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi} + \Theta^n = 0.$$

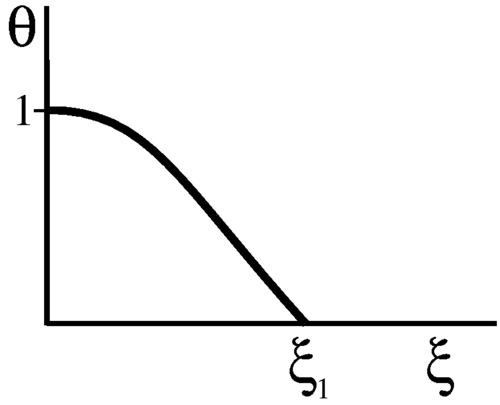


Рис. 12:

Таким образом, при данном n уравнение равновесия одно и то же для звезд любой массы. Решая уравнение при граничных условиях $\Theta(0) = 1$, $\left.\frac{d\Theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$ (т.е. положив $\lambda = \rho_c$), получим монотонное убывание Θ от единицы к нулю (рис. 12). Значение ξ_1, где $\Theta(\xi_1) = 0$, является границей звезды. Плотность ρ, пропорциональная Θ^n, при $n > 1$ спадает более круто, чем Θ. Мы уже показывали в § 1.5, что при степенном уравнении состояния на краю звезды $\rho \sim (R-r)^{1/(\gamma-1)}$. Но $\gamma = 1 + 1/n$, т.е. $\rho \sim (R-r)^n \sim \Theta^n$. Поэтому $\Theta \sim (\xi_1 - \xi)$ и вблизи $\xi = \xi_1$ величина Θ проходит нуль с конечной производной, хотя Θ^n "стелется" (при $n > 1$), т.е. подходит к нулю, касаясь оси абсцисс.

Ясно, что для звезд с различными ρ_c и K кривые с одинаковыми n подобны. Достаточно знать только одну функцию $\Theta(\xi)$. Подчеркнем важность конечного условия $\left.\frac{d\Theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$. Обратное $\left(\left.\frac{d\Theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} \neq 0\right)$ означало бы конечный скачок ускорения в центре (т.е. особенность).

Несколько авторов в прошлом веке численно проинтегрировали уравнение для различных n. В частности, Эмден получил таблицы $\Theta_n(\xi)$ с большой точностью. Значение этих вычислений теперь невелико, так как расчет реальных звезд проводится с учетом физических факторов, совершенно не учитываемых в политропной теории (нестепенное уравнение состояния; истинная связь P и ρ получается из рассмотрения всех процессов, включая перенос излучения, ядерные реакции). Однако для качественных исследований решение уравнений Эмдена весьма полезно. Например, с помощью политропной модели легко показать невозможность существования сверхмассивных звезд. Это важно для проблемы квазаров.

§ 2.2. Основные параметры политропы

При данном ξ_1 радиус звезды $R = \alpha\xi_1$,

$$\alpha = \left[(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}/4\pi G\right]^{1/2}.$$

Введем безразмерную величину $\mu_1 = \int\limits_0^{\xi_1} \Theta^n \xi^2 d\xi$. Тогда масса звезды

$$M = 4\pi \int\limits_0^R \rho r^2 dr = 4\pi\alpha^3 \rho_c \mu_1,$$

отсюда легко получить точную связь между центральной плотностью и массой звезды

$$\rho_c = \lambda = (4\pi)^{\frac{n}{3-n}} \left(\frac{M}{\mu_1}\right)^{\frac{2n}{3-n}} \left(\frac{G}{(n+1)K}\right)^{\frac{3n}{3-n}}.$$

Для давления звезды в центре имеем

$$P_c = p_1 G M^{2/3} \rho_c^{4/3}, \quad \text{где } p_1 = (4\pi)^{1/3}/(n+1)\mu_1^{2/3}.$$

Заметим, что P_c (при данных M, ρ_c) не зависит от K. Этот результат естественен, если вспомнить, что

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4} \sim GM^{2/3} \rho_c^{4/3}.$$

Но распределение давления по звезде зависит от n, поэтому выражение для P_c содержит структурный множитель $p_1(n)$. Введем еще множитель $R_1(n)$ таким образом, чтобы

$$R = R_1(n)[K^n G^{-n} M^{1-n}]^{1/(3-n)}.$$

Таблица 1:

n	ξ_1	μ_1	ρ_c/ρ_{cp}	p_1	I_1	$R_1(n)$
0	2.45	4.90	1.00	0.806	0.400	0.602
0.5	2.75	3.79	1.84	0.638	—	0.832
1	3.14	3.14	3.29	0.542	0.261	1.253
1.5	3.65	2.71	5.99	0.478	0.205	2.35
2	4.35	2.41	11.4	0.431	0.155	7.53
2.5	5.36	2.19	23.4	0.394	0.112	186
3	6.90	2.02	54.2	0.364	0.075	—
4	14.97	1.80	622	0.315	—	0.0517
5	∞	1.73	∞	0.269	0	

В ряде случаев (например, в задачах вращения) важен момент инерции звезды, выражение для которого запишем в виде

$$I = I_1 M R^2.$$

В таблице 1 мы приводим значения введенных нами структурных величин для наиболее важных значений n. Выше (§ 1.7; 1.8) были введены выражения для полной, гравитационной и тепловой энергий звезды. Интегрируя эти выражения для политропных шаров, можно получить следующие соотношения:

$$\mathcal{E} = -\frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{R}, \quad U = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R},$$

$$Q = \frac{n}{5-n}\frac{GM^2}{R}.$$

Однако есть более изящный способ вывода этих выражений с использованием соображений размерности и вариационного принципа.

Запишем выражение для полной энергии $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{E} = -aGM^2/R$, где a заранее не известно, и подставим зависимость $R(M)$, тогда $\mathcal{E} \sim GM^{2-\frac{1-n}{3-n}} \sim GM^{\frac{5-n}{3-n}}$ или в дифференциальной форме $d\mathcal{E} = \frac{5-n}{3-n} GM^{\frac{5-n}{3-n}-1}\, dM = \frac{5-n}{3-n}\frac{\mathcal{E}}{M}\, dM$. Здесь $d\mathcal{E}$ есть разность энергий двух равновесных звезд, массы которых различаются на dM.

Но мы можем изменить $\mathcal{E}$, добавляя массу dM на поверхность звезды (т.е. при $P = 0$). Тогда $d\mathcal{E} = -\frac{GM}{R}\, dM$, так как внутренняя энергия куска равна нулю, и изменилась только гравитационная энергия. Полученная конфигурация $M + dM$ не является равновесной. Тем не менее согласно вариационному принципу с точностью до $(dM)^2$ изменение энергии звезды безразлично к тому, каким образом меняется масса звезды. Поэтому $d\mathcal{E}_1 = d\mathcal{E}_2$, откуда

$$\frac{5-n}{3-n}\frac{\mathcal{E}}{M} = -\frac{GM}{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{E} = -\frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{R}.$$

С другой стороны, по теореме вириала $\frac{Q}{U} = -\,\frac{n}{3}$,

$$\mathcal{E} = Q + U = \frac{3-n}{3} U = \frac{n-3}{n} Q.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{n}{5-n}\,\frac{GM^2}{R}, \quad U = -\frac{3}{5-n}\,\frac{GM^2}{R}.$$

§ 2.3. Частные случаи политропных моделей

1. $n = 5$. Как видно из выше приведенной таблицы, при $n = 5$ безразмерный радиус $\xi_1 \to \infty$. Из формул для $\mathcal{E}$, Q, U видно, что конечные значения энергий звезды совместимы с конечной массой только при $R \to \infty$. Решения уравнения Эмдена с $n > 5$ вообще теряют обычный физический смысл.

Случай $n = 5$ имеет аналитическое решение вида

$$\Theta = \left(1 + \xi^2/3\right)^{-1/2}, \ \xi_1 = \infty.$$

Легко проверить, что полная масса звезды конечна. В самом деле, при $\xi \to \infty$ $\Theta \sim 1/\xi$, а выражение для массы $M \sim \mu_1 \sim \int\limits_0^\infty \Theta^5\,\xi^2\,d\xi$ сходится на верхнем пределе. Полный момент инерции $I \sim \int\limits_0^\infty \Theta^5\,\xi^4\,d\xi \sim \ln\xi \to \infty$, но $I/MR^2 \to 0$, так как основная часть массы сосредоточена в центре.

2. $n = 1$. Для давления в этом случае имеет место соотношение

$$P = K\,\rho^2$$

и, следовательно, $\rho \sim \Theta$ и $H \sim E \sim T \sim P/\rho \sim \Theta$. Таким образом, получаем линейное уравнение

$$\frac{1}{\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\,\xi^2\,\frac{d\Theta}{d\xi} + \Theta = 0,$$

одно из решений которого, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\Theta = \frac{\sin\xi}{\xi}$$

и обращается в нуль при $\xi_1 = \pi$. В силу линейности задачи радиус звезды R не зависит от массы. При данном K величины E и H пропорциональны ρ, и в один объем можно вложить (равновесно!) разное

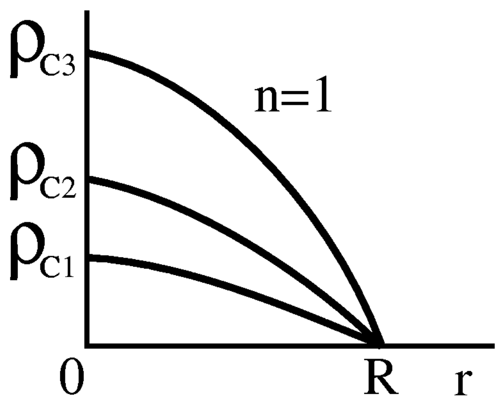


Рис. 13:

количество вещества. При увеличении массы растет только центральная плотность ρ_c (рис. 13).

<u>Задача.</u> Получите этот результат из размерностных соображений. Учтите при этом, что размерность K зависит от индекса n.

3. $n = 0$ — несжимаемая жидкость. Формально при $n \to 0$ из уравнения состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ следует, что малые изменения ρ дают большие изменения P. Это дает нам право отождествлять случай $n = 0$ с несжимаемой однородной жидкостью $\rho = \text{const} = \rho_c$. Так как тепловая энергия E равна работе, затраченной на сжатие данного газового объема, в случае несжимаемой жидкости $E = 0$ и, следовательно, $Q = 0$. Это видно и из формулы $Q = \frac{n}{5-n}\frac{GM^2}{R}$ для $n = 0$. Полная энергия $\mathcal{E}$, очевидно, равна гравитационной U.

4. $n = 3$. Случай $n = 3$ является наиболее интересным и физически важным. Как мы увидим ниже, он осуществляется и в белых карликах, и в больших горячих звездах, где $P = \varepsilon/3$, $P \sim \rho^{4/3}$ (здесь ε — плотность энергии [эрг/см^3]). И даже для Солнца наиболее близки к реальности политропные модели с $n = 3$.

В чем особенность этого случая? Во-первых, теория политропных шаров при данном уравнении состояния (при данном K) и данной массе M не позволяет вычислить радиус звезды. Кроме того, полная энергия звезды $\mathcal{E} = 0$, т.е. $U = -Q$.

Почему это происходит? Рассмотрим порядковые оценки. Тепловая энергия Q при $n = 3$ по порядку равна $Q \sim MP/\rho \sim MK\rho^{1/3}$. Для гравитационной энергии всегда имеем $U \sim -GM^2/R \sim -GM^2/(M/\rho)^{1/3}$. Полная энергия $\mathcal{E} = Q+U$. Очевидно, что для разных M энергия $\mathcal{E}$ по разному зависит от $\rho^{1/3}$ (рис. 14). В любом случае зависимость $\mathcal{E}(\rho^{1/3})$ линейная. Очевидно, что при $\mathcal{E} > 0$ система при малых возмущениях начнет разлетаться ($\mathcal{E}$ стремится уменьшиться), а при $\mathcal{E} < 0$ будет неограниченно сжиматься (коллапсировать). Равновесие возможно только при $\mathcal{E} = 0$, для этого случая имеется только одно определенное значение массы:

$$KM = GM^{5/3} \to M \sim \left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}.$$

Точное выражение

$$M = \frac{4\mu_1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}. \tag{2.1}$$

Таким образом, равновесная модель с $n = 3$ имеет три важных свойства:

1) равновесие возможно только при одном определенном значении массы (если K фиксировано), 2) полная энергия $\mathcal{E} = 0$, 3) радиус звезды R может быть любым, т.е. равновесие безразличное.

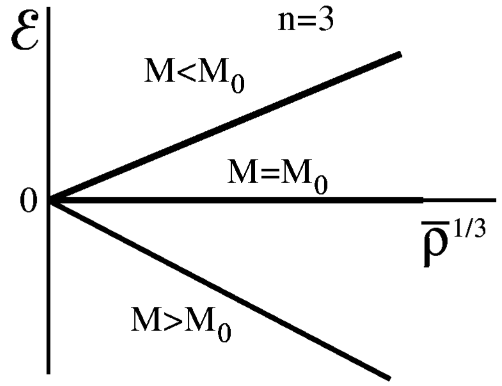


Рис. 14:

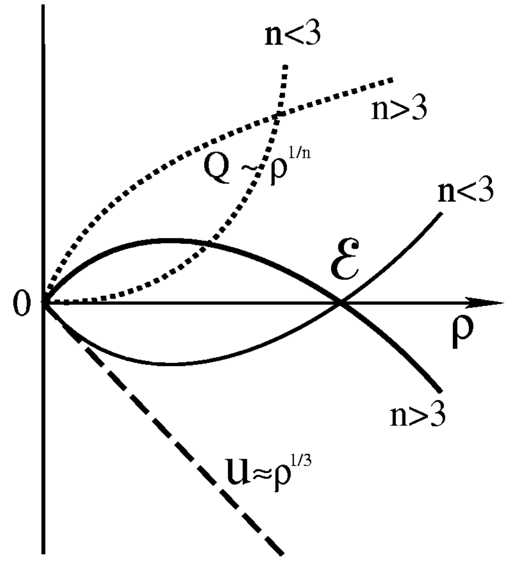


Рис. 15:

Рассмотрим кратко, как ведет себя полная энергия $\mathcal{E}$ в зависимости от плотности при $n \gtrless 3$ (рис. 15). В случае $n < 3$ набор кривых для разных масс имеет минимум, а при $n > 3$ максимум. Очевидно, что точки $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho^{1/3}} = 0$ являются положениями равновесия, но при $n < 3$ это равновесие устойчиво, а при $n > 3$ неустойчиво.

§ 2.4. Теория белых карликов

Из наблюдений известно, что массы белых карликов порядка солнечной, но размеры составляют лишь сотую часть солнечного радиуса (и даже меньше), т.е. белые карлики представляют собой звезды с черезвычайно большой плотностью вещества $\rho \sim 10^5$–10^9 г/см^3. В таком состоянии обычные атомы разрушаются, а вещество состоит из ядер и свободных электронов, которые подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Получим уравнение состояния для вещества белых карликов.

В импульсном пространстве число клеток (состояний) в 1 см^3 равно $dn = d^3p/(2\pi\hbar)^3$, где $(2\pi\hbar)^3$ — объем одной клетки (фазовой ячейки). Согласно статике Ферми–Дирака в одном состоянии может находиться только один электрон, и полное число электронов N, заключенное в фазовом объеме $V_p =$

$\int\limits_0^{p_{\text{F}}} 4\pi\, p^2 dp = \frac{4\pi}{3}\, p_{\text{F}}^3$, с учетом спина равно

$$N = \frac{2}{(2\pi\,\hbar)^3}\, V_p.$$

Здесь p_{F} — граничный импульс Ферми, выше которого при $T = 0$ все уровни свободны. Итак, число электронов в одном кубическом сантиметре

$$N = \frac{2}{(2\pi\,\hbar)^3}\,\frac{4\pi}{3}\, p_{\text{F}}^3 = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\, p_{\text{F}}^3.$$

Удобно выражать p_{F} в единицах $m_e c$, вводя безразмерный параметр $x = p_{\text{F}}/m_e c$. Тогда $N = \frac{(m_e c)^3}{3\pi^2\,\hbar^3}\, x^3$. Параметр x является мерой релятивизма: при $x \ll 1$ электроны нерелятивистские, при $x \gg 1$ ультрарелятивистские. Какой плотности вещества соответствует данный x? Обозначим через μ_e молекулярный вес на один электрон, т.е. среднее число нуклонов на один электрон ($\mu_e = 1$ для водорода, $\mu_e = 2$ для $^4\text{He}_2$ и $\mu_e = 2,2$ для $^{56}\text{Fe}_{26}$). Тогда $\rho = \mu_e \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} N = \mu_e \cdot 10^6\, x^3\, [\text{г/см}^3]$. Отсюда следует, что при $\rho < \mu_e \cdot 10^6$ г/см^3 имеем $x < 1$, т.е. $p_{\text{F}} < m_e c$, и электроны нерелятивистские. При $\rho > \mu_e \cdot 10^6$ г/см^3, $p_{\text{F}} > m_e c$.

Для водорода $x = 0,1$ осуществляется при плотности $\rho = 1000$ г/см^3 (для $^{56}\text{Fe}_{26}$ это соответствует $\rho = 2200$ г/см^3). Ферми-энергия электронов в этих условиях $E_{\text{F}} = p_{\text{F}}^2\,/2m_e = 5{\cdot}10^{-3} m_e c^2 = 2500$ эВ, что в десятки раз превышает энергию связи электронов атома водорода ($E_{\text{СВ}} = 13,6$ эВ). Таким образом, при $x > 0,1$ уже можно пользоваться теорией вырожденного электронного газа.

Рассмотрим нерелятивистскую область $0,1 < x < 1$. Средняя энергия электронов в шаре с объемом $\frac{4\pi}{3}\, p_{\text{F}}^3$ равна $\bar{E} = \frac{3}{5}\, E_{\text{F}} = \frac{3}{5}\, \frac{p_{\text{F}}^2}{2m_e}$, т.е. $\bar{E} \sim x^2$. Давление $P \sim \rho E \sim x^5 \sim \rho^{5/3}$, т.е. холодное нерелятивистское вещество представляет собой газ, подчиняющийся уравнению состояния с $\gamma = 5/3$:

$$P = K\rho^{5/3}.$$

Статистика Ферми (принцип Паули) определяет константу. Для идеального (неквантового) газа K может быть любым. Если охлаждать горячий газ до температуры $T = 0$, то K идет не в нуль, а стремится к определенному пределу. Ферми-движение электронов играет роль температуры.

З а д а ч а. Получите точную формулу для давления вырожденного нерелятивистского газа $P = 10^{23} x^5$ эрг/см^3 и найдите выражение для K через фундаментальные константы.

Вспоминая общие формулы, выведенные для политропных конфигураций, имеем ($n = 1,5$):

$$M \sim x^{3/2},\ R \sim x^{-1/2} \sim M^{-1/3}.$$

Приведем характеристики типичного белого карлика, состоящего из гелия ($\mu_e = 2$) с массой $M = 0,25\,M_\odot = 0,5 \cdot 10^{33}$ г; $\rho_c = 2,5 \cdot 10^5$ г/см^3, $\rho = 4 \cdot 10^4$ г/см^3, $R = 1,4 \cdot 10^9$ см.

Строго говоря, полученные выше результаты относятся к абсолютно холодному веществу. Вещество белых карликов, которые мы наблюдаем, имеют отличную от нуля температуру (они светят!). Но температура даже в несколько миллионов градусов мала по сравнению с характерной ферми-энергией электронов ($kT \ll E_{\rm F}$). Поэтому тепловое движение плазмы не существенно при расчете равновесия и устойчивости белых карликов, хотя для расчета их охлаждения оно важно.

С увеличением массы белого карлика растет x, и при некоторой величине M x оказывается больше еденицы, электронный газ оказывается релятивистским. Импульс электрона связа со скоростью известным соотношением

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

а энергия электрона

$$E_1 = \sqrt{\left(m_e c^2\right)^2 + p^2c^2} - m_e c^2 = m_e c^2(\sqrt{1 + x^2} - 1).$$

При малых x, когда $\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{x^2}{2}$, получим уже известную формулу

$$E_1 = m_e c^2 \frac{x^2}{2} = \frac{p^2}{2m_e}.$$

При $x \gg 1$ (оставляя только главный член в разложении) энергия одного электрона $E = m_e c^2 x$, следовательно, энергия еденицы массы $E \sim x \sim \rho^{1/3}$, а давление $P \sim \rho E \sim x^4 \sim \rho^{4/3}$.

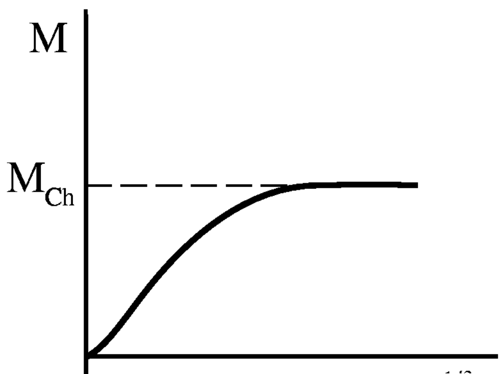
Таким образом, ультрарелятивистский вырожденный электронный газ подчиняется уравнению состояния с показателем $\gamma = 4/3$ (индекс политропы $n = 3$).

Нам уже известно (см. выше), что при $n = 3$ равновесное состояние возможно только при одной определенной массе. Для вырожденного релятивистского вещества (2.1) дает это значение массы

$$M_{\rm Ch} = \frac{5,75}{\mu_e^2}\, M_\odot.$$

Для $\mu_e = 2$, $M_{\rm Ch} = 1,44\, M_\odot$. Для всех промежуточных случаев имеются точные численные расчеты (рис. 16).

Итак, для холодного вещества решение существует только при $M <$



M_{Ch} (M_{Ch} — называют чандрасекаровским пределом массы). Из наблюдений мы знаем, что есть горячие звезды с массой, большей M_{Ch}. В результате эволюции при остывании таких звезд должна происходить потеря устойчивости и коллапс (быстрое сжатие) звезды.

В ньютоновской теории более жесткое уравнение состояния (например, отталкивание ядер) могло бы спасти звезду от коллапса. Однако в ОТО при любом уравнении состояния релятивистские эффекты всегда приводят к неустойчивости и неограниченному коллапсу.

Получим, следуя Е.Солпитеру, выражение для предельной массы белого карлика через фундаментальные физические величины m_p, $\hbar$, c, G, или, другими словами, найдем предельное число нуклонов N_{Ch}, для которых гравитация уравновешивается давлением вырожденных электронов. Имеем $M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}}$.

Из констант G, m_p, $\hbar$ и c можно составить только одно безразмерное число: $Gm_p^2/\hbar c \simeq 0,7 \cdot 10^{-38}$ (аналог постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$). По определению N_{Ch} безразмерно и

$$M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}} = m_p \left(\frac{Gm_p^2}{\hbar c}\right)^{\alpha}.$$

Как найти α? Воспользуемся для этого уравнением состояния ультрарелятивистского вещества и найдем постоянную K (приближенно)

$$E_1 = cp = c\hbar n^{1/3}, \; P = nE_1 = c\hbar n^{4/3}, \; \rho = m_p n,$$

т.е. $P = \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}}\,\rho^{4/3}$ и $K = \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}}$.

Для политропы $n = 3$ выше мы получили $M \sim (K/G)^{3/2}$. Подставляя K, имеем

$$M = \frac{c^{3/2}\hbar^{3/2}}{G^{3/2}m_p^3}\, m_p = m_P \left(\frac{c\hbar}{Gm_p^2}\right)^{3/2}, \text{ т.е. } \alpha = -\frac{3}{2}.$$

Окончательно

$$M_{\text{Ch}} \sim m_p (10^{38})^{3/2}, \; N_{\text{Ch}} \sim 10^{57}.$$

Такое большое число обусловлено тем, что константа гравитационного взаимодействия мала.

§ 2.5. Горячие звезды

Теперь рассмотрим другой предельный случай, в котором главную роль играет давление излучения.

Напомним уравнение состояния для идеального газа

$$P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}\rho,$$

здесь μ — молекулярный вес вещества, т.е. величина, которая показывает, сколько единиц атомного веса приходится на одну частицу (отличайте μ от μ_e!). Например, $\mu_H = 1/2$, но $\mu_{eH} = 1$, и $\mu_{He_2^4} = 4/3$, $\mu_{eHe} = 2$ и т.п. При высоких температурах, когда газ полностью ионизован и является одноатомным, тепловая энергия грамма вещества равна

$$E = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}T}{\mu}.$$

С другой стороны, при высоких температурах в термодинамике звезды все большую роль начинает играть давление излучения. Для излучения, находящегося в термодинамическом равновесии (планковского излучения), плотность энергии однозначно определяется температурой (см. ниже § 3.3)

$$\varepsilon_r = 7,56 \cdot 10^{-15}\, T^4 = aT^4 \text{ эрг/см}^3.$$

Давление при этом

$$P_r = \varepsilon_r/3 = 2,52 \cdot 10^{-15}\, T^4 \text{ эрг/см}^3.$$

В лабораторных условиях изменяют не плотность ε_r, а поток лучистой энергии q (Почему?), который связан с ε_r простой зависимостью

$$q = \varepsilon_r c/4.$$

(Получите коэффициент 1/4 в этой формуле.) Таким образом, $q = 5,67 \cdot 10^{-5}\, T^4 = \sigma T^4$ (закон Стефана–Больцмана). По формуле Эйнштейна плотность массы излучения

$$\rho_r = \varepsilon_r/c^2 \text{ г/см}^3.$$

Имеется широкая область астрофизических условий, когда давление и энергия излучения и вещества сравнимы, но плотность массы излучения много меньше плотности массы вещества ($\rho_r \ll \rho_m$). Выпишем теперь выражения для полного давления вещества и излучения

$$P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}\rho + \frac{aT^4}{3} = \frac{8,3 \cdot 10^7\, T\rho}{\mu} + 2,5 \cdot 10{-}15\, T^4.$$

Рассмотрим модель звезды, в которой связь между плотностью и температурой дается формулой

$$T = \tau\rho^{1/3},$$

где τ — постоянный множитель. Тогда давление вещества $P_m \sim \rho T \sim \rho^{4/3}$ и давление излучения $P_r \sim T^4 \sim \rho^{4/3}$, т.е. в такой модели отношение давления излучения и вещества постоянно по звезде и

$$P = \frac{8,3 \cdot 10^7\,\tau}{\mu}\,\rho^{4/3}\,(1 + 3 \cdot 10^{-23}\,\mu\tau^3).$$

Отметим, что в этом случае энтропия S меняется (Как? Растет или падает наружу?). Введем величину

$$y = \tau\,\sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23}\,\mu},$$

тогда

$$P = 2,7 \cdot 10^{15}\,\mu^{-4/3} y[1 + y^3]\rho^{4/3}.$$

Параметр y имеет простой смысл: $y^3 = P_r/P_m$.

Таким образом, $P = K_1\rho^{4/3}$, и мы имеем уже знакомое нам уравнение политропы $n = 3$. Мы знаем, что в этом случае равновесие возможно только при одном значении массы. Подставляя K_1 в формулу (2.1), получим

$$M = 19 M_\odot \mu^{-2}[y(1 + y^3)]^{3/2}.$$

Используя эту формулу, можно оценить роль давлния излучения для звезды данной массы (см. табл. 2, в которой принято $\mu = 0,5$).

Таблица 2: Рост давления в зависимости от массы звезды ($\mu = 0.5$)

y	0.05	0.1	0.7	1	2	10
$M/M_\odot$	0.85	2.4	70	215	5800	$7.6 \cdot 10^7$
$1 - \beta = P_r/(P_r + P_m)$	10^{-4}	10^{-3}	0.25	0.5	0.89	0.999

Из таблицы 2 видно, что звезда с массой 215 $M_\odot$ является граничной ($y = 1$). Как показал А.Эддингтон, для звезд с массой порядка 1 $M_\odot$ роль давления излучения пренебрежима, а для звезд с $M \sim 100$ $M_\odot$ давление излучения является доминирующим.

Применим теорему вириала к построенной выше модели. С учетом излучения тепловая энергия звезды

$$Q = \int \left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{R}T\rho}{\mu} + 3P_r\right) dV.$$

По теореме вириала гравитационная энергия звезды

$$U = -3\int P dV = -\int \left(3\frac{\mathcal{R}T\rho}{\mu} + 3P_r\right) dV.$$

Полная энергия звезды $\mathcal{E} = Q + U$

$$\mathcal{E} = -\int \frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{R}T}{\mu}\,\rho\, dV,$$

т.е. звезда гравитационно связана, но эта связь равна только той доле энергии, которая определяется веществом

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\beta\, U,$$

поэтому при $\beta \to 0 \quad \mathcal{E}$ — мало. В этой модели мы искусственно ввели политропу $n = 3$, но энтропия не постоянна по звезде (если $S = \mathrm{const}$ по звезде, то при $n = 3$, $\mathcal{E} = 0$). Подчеркнем разницу между показателем адиабаты γ и показателем политропы $1 + 1/n$. Возьмем одноатомный нерелятивистский газ ($\gamma = 5/3$), для которого $P \sim e^S \rho^{5/3}$. Пусть распределение энтропии по звезде определяется зависимостью $e^S \sim \rho^\alpha$, тогда давление и плотность связаны соотношением

$$P \sim \rho^{\frac{5}{3}+\alpha}.$$

Структура звезды будет определятся показателем политропы (здесь $5/3+\alpha = 1 + 1/n$), а устойчивость зависит от показателя адиабаты, т.е. от упругости вещества (в нашей модели $\gamma = 5/3$).

За счет распределения энтропии мы можем получить устойчивую звезду, например, с $n = 4$. В рассматриваемой выше модели $n = 3$, но полная энергия этой звезды не равнялась нулю, так как модель неизэнтропична. Устойчивость звезды определяется не распределением вещества, а тем, как оно ведет себя при сжатии (т.е. его упругостью!).

Глава 3. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗВЕЗДАХ

§ 3.1. Введение

В предыдущих главах изучалось механическое равновесие звезд без учета процессов выделения энергии в недрах звезды и переноса ее наружу. Сейчас, не рассматривая пока источники энергии, выделяющейся вблизи центра звезды, обратимся к процессам переноса энергии из недр звезды к ее поверхности. В зависимости от физических условий этот перенос осуществляется либо излучением (фотонами), либо электронной теплопроводностью, либо конвекцией. В большинстве случаев для нормальных звезд перенос энергии осуществляется лучистой теплопроводностью (длина свободного пробега фотонов много больше пробега электронов). Типичная звезда (например, Солнце) со светимостью $4 \cdot 10^{33}$ эрг/с потеряла бы запас тепловой энергии Q за время порядка $2 \cdot 10^7$ лет. С другой стороны, свободный фотон пролетает расстояние, равное радиусу Солнца за 2 с, т.е.,если бы звезда была прозрачна