Полная энергия звезды $\mathcal{E} = Q + U$

$$\mathcal{E} = -\int \frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{R}T}{\mu}\,\rho\,dV,$$

т.е. звезда гравитационно связана, но эта связь равна только той доле энергии, которая определяется веществом

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\beta\,U,$$

поэтому при $\beta \to 0 \quad \mathcal{E}$ — мало. В этой модели мы искусственно ввели политропу $n = 3$, но энтропия не постоянна по звезде (если $S = \mathrm{const}$ по звезде, то при $n = 3,\ \mathcal{E} = 0$). Подчеркнем разницу между показателем адиабаты γ и показателем политропы $1 + 1/n$. Возьмем одноатомный нерелятивистский газ ($\gamma = 5/3$), для которого $P \sim e^S \rho^{5/3}$. Пусть распределение энтропии по звезде определяется зависимостью $e^S \sim \rho^\alpha$, тогда давление и плотность связаны соотношением

$$P \sim \rho^{\frac{5}{3}+\alpha}.$$

Структура звезды будет определятся показателем политропы (здесь $5/3+\alpha = 1 + 1/n$), а устойчивость зависит от показателя адиабаты, т.е. от упругости вещества (в нашей модели $\gamma = 5/3$).

За счет распределения энтропии мы можем получить устойчивую звезду, например, с $n = 4$. В рассматриваемой выше модели $n = 3$, но полная энергия этой звезды не равнялась нулю, так как модель неизэнтропична. Устойчивость звезды определяется не распределением вещества, а тем, как оно ведет себя при сжатии (т.е. его упругостью!).

Глава 3. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗВЕЗДАХ

§ 3.1. Введение

В предыдущих главах изучалось механическое равновесие звезд без учета процессов выделения энергии в недрах звезды и переноса ее наружу. Сейчас, не рассматривая пока источники энергии, выделяющейся вблизи центра звезды, обратимся к процессам переноса энергии из недр звезды к ее поверхности. В зависимости от физических условий этот перенос осуществляется либо излучением (фотонами), либо электронной теплопроводностью, либо конвекцией. В большинстве случаев для нормальных звезд перенос энергии осуществляется лучистой теплопроводностью (длина свободного пробега фотонов много больше пробега электронов). Типичная звезда (например, Солнце) со светимостью $4 \cdot 10^{33}$ эрг/с потеряла бы запас тепловой энергии Q за время порядка $2 \cdot 10^7$ лет. С другой стороны, свободный фотон пролетает расстояние, равное радиусу Солнца за 2 с, т.е.,если бы звезда была прозрачна относительно излучения, она мгновенно бы потеряла запасы своей тепловой энергии.[2]

Таким образом, перенос тепловой энергии — это не движение фотонов по прямой, а медленное просачивание энергии наружу. Средняя скорость поступательного движения фотонов составляет ничтожную долю от скорости света c. Более того, фотоны не сохраняют свою "индивидуальность", т.е. при столкновениях с веществом фотоны рождаются и уничтожаются.

Медленность процесса выхода энергии наружу облегчает решение задачи лучистого переноса. В таких условиях можно ввести понятие локального термодинамического равновесия.

В изолированном сосуде может осуществлятся полное термодинамическое равновесие, т.е. такое состояние, при котором любой физический процесс строго уравновешен обратным. В условиях переноса энергии полное равновесие невозможно, так как поток энергии снизу вверх не равен потоку, идущему сверху вниз. На самой поверхности звезды фотоны летят только наружу, т.е. там термодинамическое равновесие сильно нарушается.

Внутри звезды потоки почти равны и условия мало отличаются от полного термодинамического равновесия. Поэтому мы будем считать далее, что в каждой точке осуществляется полное термодинамическое равновесие: 1) равновесие между излучением и веществом; 2) равновесие вещества (все распределения больцмановские и т.п.). Ниже будет дана оценка того, с какой точностью осуществляется это приближение.

§ 3.2. Основные понятия теории равновесного излучения

Пусть n — число фотонов в клетке фазового пространства, т.е. число заполнения, которое безразмерно. Для "ящика" данного объема можно говорить о числе состояний. Если состояний много, то число уровней в объеме V и в импульсном объеме d^3p есть

$$V\, d^3p/(2\pi\hbar)^3.$$

Тогда плотность числа фотонов

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty n d^3p\, [\text{см}^{-3}], \tag{3.1}$$

где коэффициент 2 учитывает два возможных состояния с разными поляризациями.

[2] На самом деле тепловая энергия большинства звезд сосредоточена в веществе, но в предположении абсолютной прозрачности отбор энергии излучением происходит за время $\sim 10^{-10}$ с.

Известно, что импульс фотона $\vec{p}$ связан с волновым вектором $\vec{k}$ формулой Де Бройля

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.1), получим более наглядное выражение для плотности числа фотонов

$$N = 2\int n d^3k/(2\pi)^3.$$

Поскольку $|k| = 2\pi/\lambda$, очевидна размерность $N \sim 1/\lambda^3 \sim$ см$^{-3}$ и, кроме того, исчезает постоянная Планка $\hbar$, которая была важна только при подсчете числа состояний.

В сферической системе координат

$$d^3p = p^2 dp d\Omega \quad (p = |\vec{p}|).$$

В случае сферической симметрии $\int d\Omega = 4\pi$ и

$$N = \frac{1}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty np^2 dp,$$

где n — функция только от $p:\ n = n(p)$.

Поскольку энергия одного фотона

$$E_{ph} = \hbar\omega = h\nu = cp,$$

то плотность энергии излучения (фотонного газа)

$$\varepsilon_r = \frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty np^3 dp.$$

Кроме плотности энергии ε_r важной характеристикой является спектральная интенсивность излучения F_ν ($[F_\nu]$ = эрг/см^2 с Гц стер) — величина, которая при отсутствии поглощения или рассеивания не зависит от расстояния до источника. Из наблюдений всегда получается F_ν, а в физику дела входит число заполнения n.

Получим связь между F_ν и n:

$$F_\nu = \frac{2c}{(2\pi\hbar)^3}\, np^2\, \frac{dp}{d\nu}\, cp = \frac{2np^3c}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{2nh\nu}{\lambda^2}$$

(при этом мы использовали, что $dp/d\nu = 2\pi\hbar/c$). F_ν имеет смысл энергии, проходящей через площадку λ^2 в еденицу времени в еденичном интервале частот, поэтому $[F_\nu]$ = эрг/см^2 с Гц.

В общем случае (и при отсутствии равновесия) связь между ε_r и F_ν дается формулой

$$\varepsilon_r = \frac{1}{c}\int F_\nu\, d\nu\, d\Omega.$$

§ 3.3. Кинетика фотонов и формула Планка

Рассмотрим теперь, как меняется функция распределения фотонов с учетом их взаимодействия с веществом. Пусть имеется среда из атомов, которые могут находиться только в двух состояниях — в основном и возбужденном, и разность между этими уровнями равна $h\nu$, и пусть имеется N атомов/см^3 в основном состоянии и N^* — в возбужденном. Тогда кинетическое уравнение для числа заполнения можно записать в виде

$$\frac{dn}{dt} = N^*\omega - nN\,\sigma\,c, \tag{3.2}$$

где первый член в правой части учитывает увеличение числа квантов в результате их испускания возбужденными атомами с вероятностью ω, а второй член — уменьшение n при поглощении их невозбужденными атомами, σ [см^2] — сечение возбуждения. Из квантовой механики известно, что вероятность поглощения σc тождественно равна вероятности испускания ω (так как прямой и обратный процессы описываются одним матричным элементом). В кинетическом уравнении (3.2) испускание квантов определяется только свойствами вещества и его состоянием. Однако существует вынужденное, или индуцированное, испускание: вероятность испускания квантов в какое-то состояние пропорционально числу квантов, уже имеющихся в этом состоянии. Как говорит теория (и опыт), полная вероятность испускания есть $\omega(1+n)$, и с учетом вынужденного излучения кинетическое уравнение запишется в виде

$$\frac{dp}{dt} = \omega[N^*(1+n) - Nn] = \omega[N^* - n(N - N^*)].$$

Отметим, что при $N^* > N$ возможен экспоненциальный рост плотности излучения (мазерный эффект). А в астрофизических условиях такая неравновесная ситуация может встречаться только в газовых туманностях (источники OH и т.п.).

В условиях локального термодинамического равновесия, которое осуществляется внутри звезд, ничего подобного быть не может, так как распределение атомов по энергиям описывается формулой Больцмана:

$$N^* = Ne^{-E/kT}.$$

Поскольку $E = h\nu$

$$\frac{dn}{dt} = \omega N[e^{-h\nu/kT} - n(1 - e^{-h\nu/kT})].$$

В равновесии

$$\frac{dn}{dt} = 0 \text{ и}$$

$$n = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

это формула Планка.

Легко убедиться, что равновесие устойчиво. Запишем уравнение кинетики в виде

$$\frac{dx}{dt} = a - bx.$$

Введем $y = x - a/b$, тогда $\frac{dy}{dt} = -by$, и общее решение есть

$$x = \frac{a}{b} + ke^{-bt},$$

$x = a/b$ — это равновесное решение, а общее решение описывает приближение к нему, что и доказывает устойчивость.

Рассмотрим предельные случаи формулы Планка.

1. *Рэлей — Джинсовская область.* $x = h\nu/kT \ll 1$. Используя разложение $e^x = 1 + x + \ldots$, получим для числа заполнения: $n = \frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu} \gg 1$, а для интенсивности $F_\nu = \frac{2nh\nu}{\lambda^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}$. Как видим, в последнее выражение постоянная Планка не входит. Формула $F_\nu = \frac{2kT}{\lambda^2}$ первоначально была получена в классической теории. Колебания электромагнитного поля можно представить набором осцилляторов, каждый из которых имеет энергию kT. Ясно, что формула Рэлея — Джинса неприменима при малых λ из-за расходимости интеграла $\int F_\nu d\nu$ (ультрафиолетовая катастрофа). Кроме того, при $h\nu/kT > 1$ она не согласуется с опытом. Но при $h\nu/kT > 1$ следует использовать другое предельное раложение формулы Планка.

2.*Виновская область:* $h\nu/kT > 1$, $n = e^{-h\nu/kT} \ll 1$. Это распределение имеет вид формулы Больцмана. Ее мы получили бы, если бы пренебрегли в кинетическом уравнении индуцированным излучением (так как $n \ll 1$). Точное выражение для плотности энергии

$$\varepsilon_r = \frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty np^3dp = \frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{p^3dp}{e^{\frac{cp}{kT}} - 1} =$$

$$= \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x - 1} = 7,56 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг/см}^3.$$

Здесь использован табличный интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \simeq 6,49\,.$$

Максимум функции распределения энергии по частоте приходится на $x \simeq 2,7$, т.е. $h\nu = 2,7\ kT$.

Замечание. Отметим, что формула Вина очень удобна для приближенного вычисления интегральных величин в теории излучения. Например, при вычислении полной энергии точное выражение $\int \frac{x^3 dx}{e^x-1}$ можно заменить приближенным интегралом $\int e^{-x}x^3dx$. В этом случае $x_{\max} = 3$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^3dx = 3! = 6$ (сравните с точным значением $\pi^4/15 = 6,49$). Виновское приближение является первым членом в разложении функции Планка:

$$\frac{1}{e^x-1} = e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots$$

и

$$\int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int e^{-x}\, x^3dx + \int e^{-2x}\, x^3 dx + \cdots =$$

$$= 3!\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right).$$

Это выражение наглядно демонстрирует роль остальных членов, которые дают вклад около 7%.

Используя виновское приближение, легко вычислить, какая доля энергии излучается в области частот бо́льших некоторых. Например,

$x > 3,\quad h\nu > 3\,kT$ — 60%

$x > 4,\quad h\nu > 4\,kT$ — 40%

$x > 10,\quad h\nu > 10\,kT$ — 6%.

Отметим, что несмотря на экспоненциальный множитель существенная доля энергии (6%) излучается при $x > 10$.

Ранее в кинетическом уравнении $\frac{dn}{dt} = N^*\omega(1+n) - N\,\sigma c n$, $\omega = \sigma c$, мы предполагали, что ω — вероятность перехода с одного уровня на другой. В действительности уровни имееют некоторую ширину (размыты), и полная вероятность перехода определяется интегралом (Размерность $[W] = \text{с}^{-1}$ в отличие от $[\omega] = \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.)

$$W = \frac{c}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{r=1,2}\int \sigma\,(\nu,\ \Omega,\ r)\, p^2 dp d\Omega,$$

где $\sum\limits_{r=1,2}$ учитывает два возможных состояния поляризации. Расчет сечения σ (классический, либо квантовомеханический) дает формулу

$$\sigma = \sigma_{\max}\frac{(W/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (W/2)^2} \qquad \text{(формула Лоренца)}.$$

Подставляя это выражение в интеграл для W, который запишем в виде

$$W = \frac{1}{\lambda^2}\int \sigma\,(\nu)\, d\nu,$$

получим, что $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$.

Рассмотрим причины размытости уровней. В нулевом приближении по квантовой теории возможны только строго определенные энергетические уровни. В следующем приближении появляется возможность переходов между энергетическими состояниями атома, и в силу нестационарности состояний уровни энергии оказываются размытыми — по принципу неопределенности на величину $\Delta E \sim hW$. Испускаемые кванты будут иметь размытость порядка W по частоте.

Вероятности распада могут быть разными. Например: переход с уровня $2P$ в основное состояние атома водорода происходит за $1,6 \cdot 10^{-9}$ с, в то время как в линии в 21 см за 10^6 лет. Важно, что при этом изменяется только ширина σ, пропорциональная W, но всегда $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$ (рис. 17).

Все это верно для одного изолированного атома. В действительности атомы взаимодействуют. В реальном газе существует ряд причин, по которым спектральные линии расширяются: столкновения частиц, допплер-эффект, штарк-эффект. При этом может случиться, что $\sigma_{\max}$ окажется меньше. Например, из-за допплер-эффекта должен сохраняться интеграл $\int \sigma d\omega$ и $\sigma_{\max}$ снижается.

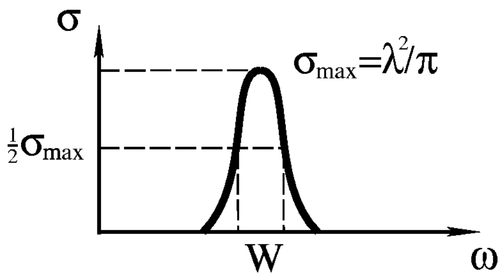

Рис. 17:

Следует помнить, что естественная высота сечения $\sigma_{\max} = \lambda^2/\pi$ сохраняется, если нет размывающих его механизмов. В качестве примера можно рассмотреть эффект Мессбауэра. Если принять соответствующие меры (грубо говоря, закрепить атомы в кристаллической решетке), то можно наблюдать резонансные линии γ–излучения ядер, при этом сечение как раз равно λ^2/π.

§ 3.4. Тормозное излучение зарядов

Заряд (электрон), движущийся равномерно и прямолинейно, очевидно, ничего не излучает (чтобы в этом убедиться, достаточно перейти в систему отсчета, где он покоится). Из классической электродинамики известно, что количество энергии, излучаемой зарядом в еденицу времени, определяется его ускорением:

$$Q = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}x^2.$$

Подчеркнем, что эта формула относится к одному заряду. Если ускоряются два жестко связанных электрона, то Q возрастает в 4 раза (так как $Q \sim e^2$). Таким образом, нельзя просто суммировать Q от различных зарядов.

Ниже мы будем рассматривать излучение электрона при ускорении его во внешнем электрическом поле, скажем, в кулоновском поле иона. Вдали электрон движется практически с постоянной скоростью. Ускорение электрона максимально при пролете на минимальном расстоянии от иона. Очевидно, при этом максимально и излучение. Нас будет интересовать и спектральный состав излучения $Q_\nu \simeq e^2 x_\nu^2/c^3$, где x_ν — фурье-компонента ускорения.

Займемся излучением длинных волн. Фурье-компонента ускорения

$$\ddot{x}_\nu = \frac{1}{2}\int e^{i\omega t}\ddot{x}\,(t)\,dt.$$

Если $|\omega t| < 1$ (длинные волны)

$$\ddot{x}_\nu = \int \ddot{x} dt = \Delta x,$$

т.е. $\ddot{x}_\nu$ равно изменению скорости за время полета и не зависит от ν. Тогда при одном столкновении в еденичном интервале частот излучается энергия

$$Q_\nu \left[\frac{\text{эрг}}{\text{Гц}}\right] = \frac{4}{3}\,e^2\,\frac{(\Delta x)^2}{c^3}. \tag{3.3}$$

Подчеркнем еще раз, что это выражение справедливо только при $\omega < 1/\tau$, где τ — длительность события (столкновения) (рассматриваем длинные волны). Заметим, что размерность Q_ν в формуле (3.3) изменилась на с^2 по сравнению с размерностью $Q\ \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}}\right]$, так как мы перешли сначала на еденичный интервал частот и, кроме того, рассматриваем энергию, излученную не в секунду, а за все время пролета.

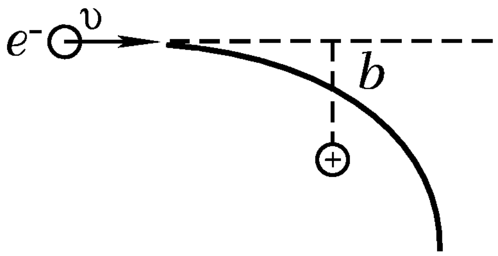

Рис. 18:

Легко подсчитать изменение импульса электрона, пролетающего в поле иона, первоначально имеющего скорость v и прицельный параметр b (рис. 18):

$$\frac{Ze^2}{b^2}\,\frac{b}{v} = \int F dt = \Delta\,(mv) = \Delta\,(mx),$$

откуда

$$\Delta\, x = \frac{Ze^2}{mbv}.$$

Пусть на ион с бесконечности падает пучок электронов со скоростью v и плотностью N_e. Через кольцо площадью $2\pi bdb$ около поля иона проходит $N_e v 2\pi bdb$ электронов в секунду. Каждый из них в еденичном интервале частот излучает Q_ν. Если в 1 см^3 находится N_Z ионов, то полный поток энергии, излучаемый в еденицу времени, очевидно, равен интегралу (логарифмический множитель опускаем)

$$J_\nu = \int\limits_0^\infty \frac{e^2\,(\Delta\,x)^2}{c^3}\,N_Z N_e v b db \simeq \frac{Z^2 e^6}{c^3}\,\frac{N_Z N_e}{m^2 v}.$$

Из квантовой механики известно, что квант частотой ν может получить только электрон, имеющий энергию больше $mv_{min}^2/2 = h\nu$. Поэтому в полное выражение войдет множитель $e^{-h\nu/kT}$

$$J_\nu = \frac{32\pi}{3}\left(\frac{2\pi\,m}{3kT}\right)^{1/2}\frac{N_Z N_e}{m^2}\,\frac{Z^2 e^6}{c^3}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\text{сГц}}\right]$$

(формула тормозного или ff-излучения). В этой формуле учтено, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям с температурой T. Как видим, число квантов с $h\nu > kT$ экспоненциально мало. Это связано с тем, что большие кванты излучаются электронами с большими энергиями, сосредоточенными в “хвосте” максвелловского распределения.

При данном объемном коэффициенте J_ν изменение интенсивности F_ν в прозрачной среде, очевидно, определяется уравнением

$$(n\nabla\,F_\nu) = \frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi},$$

где x — координата вдоль произвольного направления n. Прозрачный источник (малы поглощение и индуцированное излучение) дает одну и ту же освещенность в любой точке сферы с радиусом много больше размеров источника независимо от формы источника. В общем случае с учетом индуцированного излучения и поглощения изменение интенсивности вдоль определенного направления выражается уравнением

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi} + \frac{J_\nu}{4\pi}n - a_\nu F_\nu,$$

где a_ν [см$^{-1}$] — коэффициент поглощения.

При полном термодинамическом равновесии $n = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, $F_\nu = F_{\nu\,\mathrm{eq}} \sim \nu^3/\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)$, $\frac{dF_\nu}{dx} = 0$. Получаем, что отношение объемного коэффициента излучения вещества J_ν к его коэффициенту поглощения a_ν есть универсальная функция ν и T (закон Кирхгофа):

$$J_\nu/a_\nu = 8\pi\,h\,\nu^3\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}/c^2.$$

Таким образом, если вычислено J_ν, то a_ν находится элементарно, и для свободно-свободных (ff)-переходов получаем

$$a_\nu = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi}{3kTm}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^6 Z^2 N_Z N_e}{hcm\,\nu^3} = \frac{3,7\cdot 10^8 Z^2 N_Z N_e}{\nu^3\sqrt{T}}\ [\text{см}^{-1}].$$

Объеденим в правой части уравнения переноса члены, отвечающие индуцированному излучению и поглощению, так как оба они пропорциональны неизвестной функции координат — интенсивности излучения F_ν (поскольку $n \sim F_\nu$). В члене индуцированного испускания $J_\nu n/4\pi$ выразим J_ν через коэффициент поглощения a_ν, тогда правая часть примет вид $\frac{J_\nu}{4\pi} - a_\nu(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})\,F_\nu$.

Отсюда видно, что вынужденное испускание можно трактовать как некое уменьшение поглощения: часть квантов как бы поглощается и тут же испускается с той же частотой и в том же направлении с вероятностью $e^{-h\nu/kT}$. Физически такие акты никак себя не проявляют и их можно вообще исключить из рассмотрения, вводя

$$a'_\nu = a_\nu\,(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}).$$

Уравнение переноса принимает вид

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{J_\nu}{4\pi} - a'_\nu F_\nu,$$

и взаимодействие излучения с веществом можно представить так, как будто существует только спонтанное испускание и эффективное поглощение, описываемое коэффициентом a'_ν.

Коэффициент истинного поглощения $a_\nu \sim \nu^{-3}$, но при $h\nu < kT$ эффективное поглощение $a'_\nu \sim \nu^{-2}$ и в равновесии это дает рэлей-джинсовскую формулу для интенсивности $F_{\rm eq} \sim \frac{J_\nu}{a'_\nu} \sim \nu^2$ (коэффициент излучения I_ν при $h\nu < kT$ фактически постоянен). Используя закон Кирхгофа $\frac{J_\nu}{4\pi} = a'_\nu F_{\nu\,\rm eq}$, запишем в общем случае уравнение переноса в виде

$$\frac{dF_\nu}{dx} = a'_\nu\,(F_{\nu\,\rm eq} - F_\nu).$$

Это уравнение записано для координаты, изменяющейся вдоль луча зрения. Из него видно, что, если при $x = 0$ $F_\nu = 0$, то сначала, при малых $x < 1/a'_\nu$, F_ν стремится к $F_{\nu\,\rm eq}$ линейно: $F_\nu = a'_\nu F_{\nu\,\rm eq} x$, а затем при $x > 1/a'_\nu$ быстро устанавливается равновесие, при котором $F_\nu = F_{\nu\,\rm eq}$. Если размеры излучающего облака (слоя) x_0 меньше $1/a'_\nu$, то оно является оптически тонким и интенсивность его излучения всегда меньше равновесной в $a'_\nu x_0$ раз. Полный поток энергии, излучаемой такими облаками, пропорционален $F = \int F_\nu d\nu = x_o \int a'_\nu F_{\nu\,\rm eq} d\nu$. Введем средний коэффициент поглощения

$$a = \frac{\int a'_\nu F_{\nu\,\rm eq} d\nu}{\int F_{\nu\,\rm eq} d\nu},$$

тогда

$$F = a x_0 F_{eq}.$$

Средний коэффициент поглощения для тормозного механизма, очевидно, равен

$$a_{ff} = 6,5 \cdot 10^{-24} Z^2 \frac{N_e N_Z}{T^{7/2}}\ [\text{см}^{-1}].$$

Соответствующая средняя длина свободного пробега фотона

$$l_{ff} = \frac{1}{a_{ff}} = 1,5 \cdot 10^{23} \frac{T^{7/2}}{Z^2 N_e N_Z} \text{ [см]}.$$

Причем, если плазма содержит смесь ионов с зарядами Z_i и атомными массами A_i, то

$$N_e = 6 \cdot 10^{23} \rho \sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i},$$

$$Z^2 N_Z = 6 \cdot 10^{23} \rho \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i},$$

где X_i — весовая доля данного иона.

Рассмотрим процесс установления равновесия между веществом и излучением для однородной неограниченной среды, в которой в начальный момент $t = 0$ излучение отсутствовало, а вещество было мгновенно нагрето до температуры T_0. Очевидно, что прежде всего это равновесие установится на низких частотах, так как $a'_\nu \sim 1/\nu^2$. С течением времени равновесие будет устанавливаться при бо́льших значениях ν (см. рис. 19).

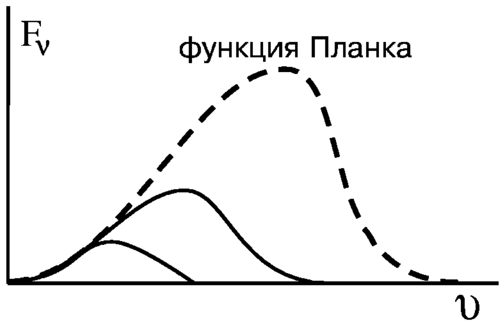

Рис. 19:

§ 3.5. Рассеяние излучения на свободных электронах

Рассмотрим движение электрона в плоской электромагнитной волне: $E_x = E_0 \cos \omega t$, распространяющейся вдоль оси z. Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = eE_0 \cos \omega t,$$

и энергия, излучаемая таким электроном,

$$Q = \frac{2}{3} \frac{e^2 \ddot{x}^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^4 E_0^2 \cos^2 \omega t}{m^2 c^3}.$$

Своих источников энергии у электрона нет. Фактически он переизлучает (рассеивает) энергию падающей электромагнитной волны в других направлениях, так что

$$Q = W \sigma_T \text{ [эрг/с]},$$

где W [эрг/ссм^2] — поток падающей энергии:

$$W = c\,\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = c\,\frac{E_0^2 \cos^2 \omega t}{4\pi},$$

и сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{Q}{W} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3}\,r_0^2 \text{ [см}^2]$$

знаменитая формула Томсона. Величина

$$r_0 = e^2/mc^2 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

называется классическим радиусом электрона.

При преобладающей роли электронного рассеяния (процессы поглощения излучения несущественны) изменение интенсивности F_ν в монохроматическом пучке фотонов, очевидно, равно

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\sigma_T N_e F_\nu.$$

Можно ввести коэффициент "поглощения" при томсоновском рассеянии (хотя реально поглощения энергии и нет):

$$a_T = \sigma_T N_e = \frac{1}{l_T} \text{ см}^{-1},$$

где длина пробега

$$l_T = \frac{1}{a_T} = \frac{2,5\mu_e}{\rho} \text{ [см]}.$$

Интегрируя уравнение для F_ν, получаем

$$F_\nu = F_\nu e^{-\int \frac{\rho\, dx}{2,5\mu_e}},$$

т.е. $2,5$ г/см^2 водородной плазмы ($\mu_e = 1$) уменьшают F_ν в e раз за счет электронного рассеяния.

В астрофизике обычно пользуются не коэффициентом поглощения a_T, a_ν, а так называемой непрозрачностью

$$\kappa_\nu = a_\nu/\rho \text{ [см}^2/\text{г]}.$$

Таким образом, непрозрачность за счет рассеяния

$$\kappa_T = 0,4\mu_e \text{ [см}^2/\text{г]}.$$

З а д а ч и. 1. Дана водородная ($Z = 1$) плазма со значениями плотности $\rho = 10^{-6},\ 10^{-3},\ 1$ г/см^3, температурой $T = 10^8,\ 3 \cdot 10^6,\ 10^5$ К. Для $x =$

$h\nu/kT = 10^{-2},\ 10^{-1},\ 1,\ 5,\ 20$ найти $\nu,\ \lambda,\ \kappa_{ff},\ \kappa_T$. В переменных $\lg T - \lg \rho$ найти кривую, на которой $\kappa_{ff} = \kappa_T$. Подсчитайте J_ν.

2. Пусть в каждой точке звезды плотность и температура связаны соотношением $\rho = \mathrm{const} \cdot T^3$, где const заранее не известна. (Тогда $P \sim T^4 \sim \rho^{4/3}$, т.е. индекс политропы $n = 3$.) Для чисто водородных моделей звезд с массами $M = 1,\ 10,\ 100_\odot$ и центральных плотностей $\rho_c = 100,\ 1$ и 10^{-2} г/см^3 найти радиус R, температуру в центре T_c и полную энергию $\mathcal{E}$.

3. Пусть распределение плотности по звезде определяется зависимостью $\rho = \rho_c[1 - (r/R)^2]^g$, где $g = 1,\ 2,\ 3$. Найти гравитационную энергию звезды $U = -\frac{GM^2}{R} K_g$, т.е. найти K_g.

Пусть энергия еденицы массы E связана с ρ соотношениями: a) $E = A\rho^{1/3}$, b) $E = A\rho^{1/2}$. (Какое при этом $P = P(\rho)$?)

При тех же распределениях плотности найти связь между M и A из условия минимума полной энергии $\mathcal{E}$.

Глава 4. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 4.1. Перенос излучения при рассеянии

В предыдущей главе было получено уравнение для изменения интенсивности при томсоновском рассеянии

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\varkappa_{\text{т}}\, \rho\, F_\nu,\ \varkappa_{\text{т}} = 0,4/\mu_e\ \left[\frac{\text{см}^2}{\text{г}}\right].$$

Таким образом, интенсивность излучения удаленного точечного источника при прохождении через рассеивающую среду уменьшается. Однако внутри звезд в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) излучение идет со всех направлений, так что хотя часть лучей уходит с данного направления за счет рассеяния, за счет того же рассеяния приходят лучи с других направлений. Поэтому уравнение переноса можно записать в виде (поскольку частота при рассеянии не изменяется)(Сечение рассеяния считаем не зависящим от угла, так как томсоновское сечение рассеяния симметрично относительно рассеяния на углы π и $\pi - \Theta$: $\sigma(\Theta) = \sigma(\pi - \Theta)$. Поэтому в теории переноса его можно заменить на $\sigma = \mathrm{const}$.)

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -F_\nu \varkappa_{\text{т}} \rho + <F_\nu(\Theta)> \varkappa_{\text{т}} \rho,$$

где $<F_\nu(\Theta)>$ — усредненная по углу интенсивность излучения.

Нас интересует поток энергии излучения. Поскольку полного термодинамического равновесия нет, в каждой точке должна быть зависимость F_ν от направления (анизотропия). Однако эта анизотропия внутри звезды мала, и