

$h\nu/kT = 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 5, 20$ найти $\nu, \lambda, \kappa_{ff}, \kappa_T$. В переменных $\lg T - \lg \rho$ найти кривую, на которой $\kappa_{ff} = \kappa_T$. Подсчитайте J_ν .

2. Пусть в каждой точке звезды плотность и температура связаны соотношением $\rho = \text{const} \cdot T^3$, где const заранее не известна. (Тогда $P \sim T^4 \sim \rho^{4/3}$, т.е. индекс политропы $n = 3$.) Для чисто водородных моделей звезд с массами $M = 1, 10, 100_\odot$ и центральных плотностей $\rho_c = 100, 1$ и 10^{-2} г/см³ найти радиус R , температуру в центре T_c и полную энергию \mathcal{E} .

3. Пусть распределение плотности по звезде определяется зависимостью $\rho = \rho_c [1 - (r/R)^2]^g$, где $g = 1, 2, 3$. Найти гравитационную энергию звезды $U = -\frac{GM^2}{R} K_g$, т.е. найти K_g .

Пусть энергия единицы массы E связана с ρ соотношениями: а) $E = A\rho^{1/3}$, б) $E = A\rho^{1/2}$. (Какое при этом $P = P(\rho)$?)

При тех же распределениях плотности найти связь между M и A из условия минимума полной энергии \mathcal{E} .

Глава 4. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 4.1. Перенос излучения при рассеянии

В предыдущей главе было получено уравнение для изменения интенсивности при томсоновском рассеянии

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\kappa_T \rho F_\nu, \quad \kappa_T = 0,4/\mu_e \left[\frac{\text{см}^2}{\text{г}} \right].$$

Таким образом, интенсивность излучения удаленного точечного источника при прохождении через рассеивающую среду уменьшается. Однако внутри звезд в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) излучение идет со всех направлений, так что хотя часть лучей уходит с данного направления за счет рассеяния, за счет того же рассеяния приходят лучи с других направлений. Поэтому уравнение переноса можно записать в виде (поскольку частота при рассеянии не изменяется) (Сечение рассеяния считаем не зависящим от угла, так как томсоновское сечение рассеяния симметрично относительно рассеяния на углы π и $\pi - \Theta$: $\sigma(\Theta) = \sigma(\pi - \Theta)$. Поэтому в теории переноса его можно заменить на $\sigma = \text{const}$.)

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -F_\nu \kappa_T \rho + \langle F_\nu(\Theta) \rangle \kappa_T \rho,$$

где $\langle F_\nu(\Theta) \rangle$ — усредненная по углу интенсивность излучения.

Нас интересует поток энергии излучения. Поскольку полного термодинамического равновесия нет, в каждой точке должна быть зависимость F_ν от направления (анизотропия). Однако эта анизотропия внутри звезды мала, и

при усреднении по всем направлениям мы получим величину, мало отличную от равновесной,

$$\langle F_\nu(\Theta) \rangle = F_{\nu \text{ eq}}.$$

В условиях ЛТР температура плазмы соответствует температуре $F_{\nu \text{ eq}}$ и $F_{\nu \text{ eq}}$ является в сферической звезде функцией только радиуса

$$F_{\nu \text{ eq}} = F_{\nu \text{ eq}}(r).$$

Поэтому при рассеянии уравнение переноса имеет тот же вид, что и при поглощении:

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \rho \kappa_\Gamma (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu). \quad (4.1)$$

Разница заключается в области применимости. Для тормозных процессов достаточно только равновесия плазмы, а излучение может быть существенно неравновесным и уравнение $dF_\nu/dx = \rho \kappa (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu)$ применимо даже вблизи края звезды. Для рассеяния излучение должно быть почти равновесным, поэтому у края звезды, где сильна анизотропия излучения, уравнение (4.1) неприменимо. Итак, внутри звезды

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \rho \kappa_{\text{tot}} (F_{\nu \text{ eq}} - F_\nu), \quad (4.2)$$

где

$$\kappa_{\text{tot}} = \kappa_{\text{ff}} + \kappa_\Gamma.$$

В других условиях могут играть роль и другие механизмы непрозрачности, но эти остаются важными.

Как решать уравнение переноса (4.2)? В условиях ЛТР предлагается следующий метод последовательных приближений.

1-е приближение: $F_\nu = F_{\nu \text{ eq}}(x)$ (в оптически тонкой плазме $F_\nu \ll F_{\nu \text{ eq}}$).

2-е приближение: найдем малые отклонения от полного термодинамического равновесия. Подставляя $F_{\nu \text{ eq}}(x)$ в левую часть (4.2), имеем вдоль луча с координатой x

$$F_\nu = F_{\nu \text{ eq}} - \frac{1}{\rho \kappa} \frac{dF_{\nu \text{ eq}}}{dx}.$$

Величина $l = 1/\kappa\rho$, очевидно, есть длина свободного пробега кванта $h\nu$. Предполагая, что $F_{\nu \text{ eq}} = F_{\nu \text{ eq}}(x)$, имеем

$$F_{\nu \text{ eq}}(x + a) = F_{\nu \text{ eq}}(x) + a \frac{\partial F_{\nu \text{ eq}}}{\partial x}.$$

Сопоставляя эти две формулы, мы видим, что $F_\nu(x)$ есть $F_{\nu \text{ eq}}$ в точке, “отстающей” от x на длину свободного пробега фотона (см. рис. 20):

$$F_\nu = F_{\nu \text{ eq}}(x - l).$$

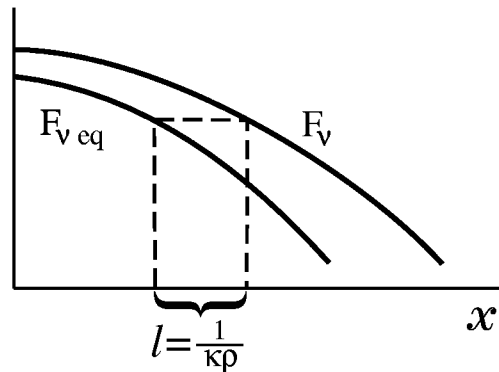


Рис. 20:

§ 4.2. Коэффициент теплопроводности. Росселандово среднее

Займемся важной для теории звезд задачей — определим коэффициент теплопроводности.

$F_{\nu \text{ eq}}$ является функцией только температуры. Пусть температура меняется вдоль координаты z , $T = T(z)$, x — любая ось в пространстве, и Θ — угол между осями (z, x) . Тогда

$$\frac{dF_{\nu \text{ eq}}(x)}{dx} = \frac{dF_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dx} = \frac{dF_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dz} \cos \Theta,$$

т.е. $dF_{\nu \text{ eq}}/dx$ зависит от угла Θ , и для интенсивности имеем соотношение

$$F_{\nu}(\Theta, x) = F_{\nu \text{ eq}}(x) - l \frac{dT}{dz} \frac{dF_{\nu}}{dT} \cos \Theta.$$

Подсчитаем полный поток энергии, проинтегрированный по всем частотам. По соображениям симметрии поток направлен вдоль оси z :

$$H_z = \int F_{\nu} \cos \Theta d\Omega d\nu \text{ [эрг/с см}^2\text{]}.$$

Интеграл по $d\Omega$ берется по всем углам, т.е. полный поток есть разность потоков слева направо и справа налево. Подставим F_{ν} в выражение для H_z :

$$H_z = \int F_{\nu \text{ eq}} \cos \Theta d\Omega d\nu - \frac{dT}{dz} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu \text{ eq}}}{dT} \cos^2 \Theta d\Omega d\nu.$$

Везде ниже будем писать F_{ν} , понимая под этим $F_{\nu \text{ eq}}$. Первый член в правой части уравнения после интегрирования по $d\Omega$ обращается в ноль, а во втором зависимость $\cos^2 \Theta$ даст $4\pi/3$. В итоге полный поток равен

$$H_z = -\frac{dT}{dz} \frac{4\pi}{3} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu,$$

где величина $\frac{4\pi}{3} \int l_{\nu} \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu$ называется коэффициентом лучистой теплопроводности (напомним, что в общем случае коэффициентом теплопроводности называется величина, стоящая при ∇T). Запишем выражение для H_z в том же виде, что и в кинетической теории газов. Ранее мы определили плотность излучения в каждой точке как

$$\varepsilon_r = \frac{4\pi}{c} \int F_{\nu} d\nu.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dF_{\nu}}{dT} d\nu = \frac{d}{dT} \frac{c\varepsilon_r}{4\pi}.$$

Введем среднюю длину пробега

$$\langle l \rangle = l_{Ross} = \frac{\int l_\nu \frac{dF_\nu}{dT} d\nu}{\int \frac{dF_\nu}{dT} d\nu}.$$

Эта величина называется росселандовым средним. Тогда

$$H_z = -\frac{dT}{dz} l_{Ross} \frac{4\pi}{3} \frac{c}{4\pi} \frac{d\varepsilon_r}{dT} = -l_{Ross} \frac{c}{3} \frac{dT}{dz}.$$

Итак, $\vec{H} = -D\nabla T$, где $D = cl/3$ — коэффициент диффузии такой же, как в кинетической теории газов. Главный вклад в росселандово среднее дают кванты с энергией $h\nu \approx 4kT$, т.е. основную роль в переносе энергии играют кванты с большой энергией.

В оптически толстом теле с источником тепла внутри возникает градиент температуры, и поток тепла определяется зонами прозрачности. Оптически тонкий горячий слой излучает (по закону Кирхгофа) то же, что он поглощал бы при внешнем облучении. Таким образом, больше всего такой слой излучает там, где велика непрозрачность, например в линиях.

Примеры. 1. Пусть имеется только томсоновское рассеяние, т.е. $l = 1/\kappa_T \rho$. Чему равно l_{Ross} ? Очевидно, $l_{Ross} = l$, так как l_T не зависит от ν .

2. Пусть непрозрачность κ_ν задана в виде гребенки (рис. 21) с длиной зубцов $b - a$, $b \gg a$ и шириной зубцов, равной расстоянию между ними. Тогда, очевидно, $l_{Ross} \simeq 1/2a\rho$, т.е. в задачах переноса излучения весь поток поступает в “окнах большей прозрачности” (ответ не зависит от b !). В задачах об излучении оптически тонкой плазмы все определяется верхушками гребенки, где велико поглощение и велико излучение.

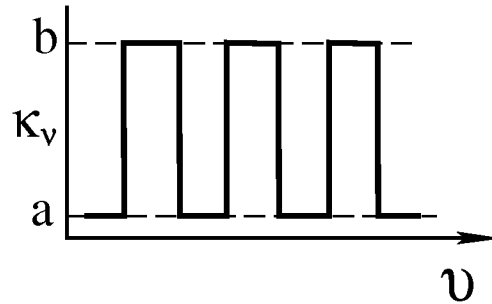


Рис. 21:

В первом приближении такая гребенка (только с различной шириной зубцов и промежутков) может имитировать учет поглощения в линиях при переносе излучения.

3. Найдем l_{Ross} для тормозного поглощения. Имеем

$$l_\nu \sim \sqrt{T} \frac{\nu^3}{1 - e^{-h\nu/kT}}.$$

Введем $x = h\nu/kT$, тогда

$$l_\nu \sim T^{7/2} x^3 \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad F_\nu \sim \nu^3 \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\frac{dF_\nu}{dT} \sim \frac{\nu^4}{T^2} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \sim T^2 x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Интегрируя и выписывая численные коэффициенты, получим

$$\kappa_{ff} = \frac{7 \cdot 10^{22} \rho}{T^{7/2}} \left(\sum \frac{X_i Z_i^2}{A_i} \right) \left(\sum \frac{X_i Z_i}{A_i} \right)$$

— формула Крамерса.

Как и раньше,

$$\vec{H} = -\frac{c}{3\kappa_{ff}\rho} \nabla \varepsilon_r.$$

Оказывается, что $\kappa_{ff} = \kappa_\nu$ при $h\nu/kT = 6$, т.е. эффективный перенос тепла осуществляется квантами большой энергии. Это объясняется тем, что максимум весовой функции dF_ν/dT приходится на $x \approx 4$, и, кроме того, тем, что усредняется $1/a'_\nu$, а a'_ν убывает с частотой.

Заметим, что в формулу для непрозрачности входит отношение $\rho/T^{7/2}$. С другой стороны, как мы показали ранее, $\rho/T^3 \sim P_g/P_r$, причем это отношение определяется массой звезды. Таким образом, в первом приближении, пренебрегая различием $T^{7/2}$ и T^3 , получим, что κ пропорциональна P_g/P_r и тоже однозначно зависит от массы звезды.

Если в непрозрачности важны оба механизма, то $\kappa_{Ross} \neq \kappa_{ff} + \kappa_\tau$ (не забывайте, что усредняем $l_\nu = 1/(\kappa_\nu + \kappa_\tau)$). В качестве упражнения подсчитайте в этом случае κ_{Ross} . Можно показать, что

$$\kappa_{Ross} = \kappa_\tau f(\rho/T^{7/2}).$$

Не надо преувеличивать точность всех этих расчетов. Все, что мы говорили, справедливо для водородной плазмы, но для реального звездного вещества существенна роль тяжелых элементов. Например, для железа энергия связи последних K -электронов порядка 9 кэВ и степень ионизации его меняется с глубиной. Все оказывается гораздо сложнее. Необходимо учитывать многие процессы: свободно-связанные, связанно-связанные (линии) и др. В этой книге дается лишь общая физическая картина, общее представление, а не точные методы расчета. Один вопрос о теплопроводности, рассматриваемый в современных статьях, может быть предметом целого курса. Настоящий курс позволит начать чтение оригинальных статей, но никак не заменит их.

§ 4.3. Поведение ρ и T вблизи поверхности горячей звезды

Зависимость ρ и T от радиуса определяется уравнениями:

$$1) \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho \text{ — уравнение гидростатики,}$$

2) $L(r) = -4\pi r^2 \frac{c}{3\kappa\rho} \frac{d\varepsilon_r}{dr}$ — уравнение теплопроводности, где $L(r) = H_r 4\pi r^2$ — светимость, т.е. полный поток энергии через сферу радиуса r . Так как $P_r = \varepsilon_r/3$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa\rho L(r)}{c4\pi r^2}.$$

Если бы ядерная энергия каждой единицы массы звезды ε (эрг/г·с) выделялась одинаково, так что $\varepsilon = \text{const}$ по звезде и $L(r) = \varepsilon m(r)$, то мы получили бы, что

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{\kappa\varepsilon}{cG4\pi}.$$

Поскольку приближенно

$$\kappa = \kappa(P_r/P), \quad (4.3)$$

мы получим решение, положив, например,

$$P_r/P = \text{const}.$$

Несколько десятков лет назад, когда мало знали об источниках ядерной энергии, астрофизики занимались задачами подобного рода, однако сейчас это представляет чисто исторический интерес.

Вблизи поверхности звезды $m(r) = M$, $L(r) = L$ — полная светимость звезды и

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{\kappa L}{cG4\pi M};$$

это хорошее приближение потому, что постоянно выделение энергии ε , а потому, что у поверхности $M - m \ll M$.

При $r = R$ $P_r = 0$, $P = 0$ и $P_r = \text{const} \cdot P$. Из (4.3) получим $\kappa = \text{const}$, а из уравнения гидростатики

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{d(\rho T)}{dr} = \text{const} \cdot \rho$$

имеем $T = \text{const} \cdot (R - r)$. Из $P_r/P = \text{const}$ следует $\rho \sim T^3 = \text{const}(R - r)^3$. Таким образом, независимо от того, как распределены источники ядерной энергии вблизи центра звезды, следует асимптотическое распределение T и ρ вблизи поверхности. Заметим только, что на краю $T \neq 0$, а $T \rightarrow T_{eff}$. Поэтому наши асимптотики верны при $T > T_{eff}$, где T_{eff} определяется соотношением

$$L = 4\pi\sigma T_{eff}^4 R^2,$$

т.е. не в атмосфере и не в короне.

§ 4.4. Критическая эддингтоновская светимость

Из условия $P > P_r$ следует, что $\left| \frac{dP}{dr} \right| > \left| \frac{dP_r}{dr} \right|$. Вообще говоря, не всегда можно дифференцировать неравенства, но в данном случае нетрудно убедиться, что все в порядке. Теперь очевидно, что

$$L \leq \frac{4\pi GMc}{\kappa}.$$

Самая маленькая непрозрачность — это $\kappa_T = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}$. Поэтому светимость звезды не может никогда превышать величину $4\pi GMc/0,4$, т.е.

$$L \leq 6,3 \cdot 10^4 M = 3 \cdot 10^4 L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \right) = L_c,$$

L_c — величина, называемая эддингтоновским пределом светимости.

Отметим, что для Солнца $L_\odot/M_\odot = 2 \text{ эрг/г с}$, т.е. выделяется энергии примерно столько же, сколько при гниении опавших листьев, и большая светимость определяется только большой массой, но все равно $L_\odot \ll L_c$.

Подсчитаем эддингтоновский предел еще одним простым способом. Пусть на некотором расстоянии от звезды со светимостью L имеется один электрон. Поток излучения H через 1 см^2 равен

$$H = \frac{L}{4\pi r^2} = \int h\nu \cos \Theta \cdot \varphi(\nu, \Theta) d\Theta d\nu,$$

где φ — число квантов в единичном интервале частот, пролетающих через 1 см^2 в направлении Θ за одну секунду.

При столкновении с электроном один квант отдает импульс $h\nu/c$, и сила, действующая на электрон со стороны излучения (импульс, передаваемый в единицу времени),

$$f = \int \frac{h\nu}{c} \cos \Theta \cdot \varphi \sigma_T d\Theta d\nu.$$

Дальнейший расчет прост. Так как σ_T не зависит от частоты, а индикатрисса рассеяния хотя и зависит от угла, но такова, что вероятность рассеяния на угол $\pi - \Theta$, получим

$$f = \frac{\sigma}{c} H. \quad (4.4)$$

Таким образом, при подсчете не важно распределение функции φ по углу. Один и тот же результат (4.4) получится и внутри звезды, где φ почти симметрично, и вне звезды, где кванты летят в узком телесном угле. Приравнявая это выражение для f силе притяжения, действующей на один протон, получим

$$f = \frac{\sigma}{c} H = \frac{\sigma}{c} \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{GMm_p}{r^2}.$$

Мы подставили m_p , так как сила притяжения протонов много больше силы электронов. В стационарной картине возникает электростатическое поле, удерживающее электроны. Таким образом, у звезды возникает заряд. (Вычислите величину и знак этого заряда.)

Итак,

$$L \leq \frac{GMm_p c}{\sigma_T} = L_c.$$

§ 4.5. Устойчивость теплового потока

Рассмотрим простую задачу. Пусть имеются две пластины с заданными температурами T_1 и T_2 , вещество между ними с теплопроводностью D , зависящей от T (см. рис. 22). В стационарных условиях установится поток типа

$$H = -D \frac{dT}{dx}.$$

Пусть в каком-то диапазоне температур D упадет до нуля. Как изменится H ?

Ответ “ $H = 0$ ” неверен. В стационарной картине $H = \text{const}$

$$H = \frac{\int_{T_1}^{T_2} D dT}{x_1 - x_2}.$$

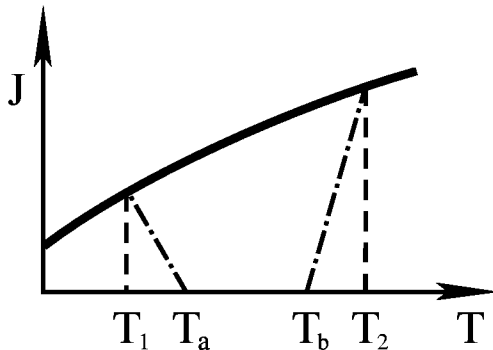


Рис. 22:

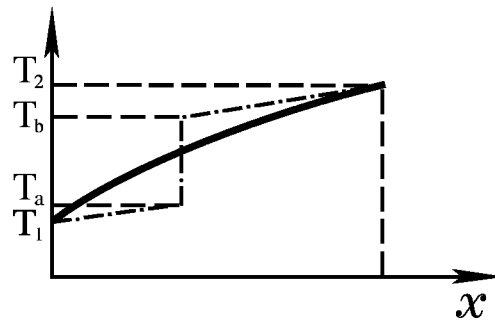


Рис. 23:

Поэтому, если при некоторых температурах $D = 0$ (точнее, очень мало), то немного уменьшится $\int_{T_1}^{T_2} D dT$, H соответственно упадет, но не обратится в нуль. Важно, что ∇T подстроится так, что $H = \text{const}$, появится скачок T (см. рис. 23). Другое дело, если задать D как функцию x ; в этом случае поток мог бы и обратиться в нуль, так как в этом случае

$$H = \frac{T_1 - T_2}{\int \frac{1}{D} dx},$$

т.е. при $D \rightarrow 0$ и $H \rightarrow 0$.

§ 4.6. Конвекция

Уравнения равновесия позволяют исследовать устойчивость звезды относительно сжатия или расширения без перестановки слоев. Из вариационного принципа мы знаем, что при $\gamma > 4/3$ энергия имеет минимум, звезда устойчива относительно таких возмущений. Следующий вопрос — устойчива ли она относительно перестановки слоев. Сферически-симметричными движениями в пределах гидродинамики невозможно переставить слои вещества: появляются бесконечные P, ρ . Поэтому необходимы более сложные движения.

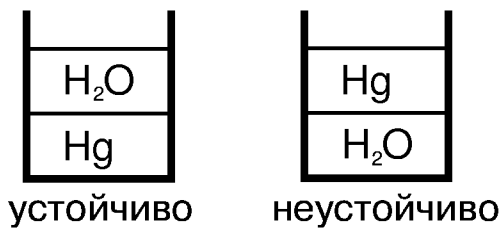


Рис. 24:

Рассмотрим, например, равновесие двух несжимаемых жидкостей с различной плотностью (вода и ртуть), рис. 24. Ситуация, в которой более тяжелая жидкость находится сверху, может быть устойчивой относительно плоских движений, но, рассматривая более широкий класс возмущений, например опрокидывание, получим выигрыш энергии. Та-

ким образом, картина устойчива только тогда, когда снизу находится более тяжелая жидкость.

Задача 1. Проверьте это методом малых возмущений.

Задача 2. Проверьте, что и в случае сферически-симметричного распределения несколько несжимаемых жидкостей разной плотности гравитационная энергия $G \int m dm / r$ минимальна, когда внутри более плотная несжимаемая жидкость.

В звездах плотность падает с высотой. Это еще не значит, что они обязательно устойчивы относительно перестановок слоев. Для ответа на вопрос об устойчивости мы должны привести два разных элемента к одинаковому давлению и сравнить их плотности. Если при этом плотность поднятого элемента окажется меньше, то такое распределение плотности неустойчиво. Рассмотрим, например, одноатомный газ:

$$\rho = e^{-aS/\mathcal{R}} P^{3/5},$$

где S — энтропия, \mathcal{R} — универсальная газовая постоянная. Если два элемента привести к одинаковому давлению, то, очевидно, мерой плотности, а значит и величиной, от которой зависит критерий устойчивости, будет энтропия S этих элементов. При адиабатических смещениях энтропия сохраняется и распределение будет устойчивым, когда S растет с высотой, так как при этом поднявшийся элемент окажется тяжелее окружающего газа. Таким образом, при $dS/dr > 0$ конфигурация устойчива, при $dS/dr < 0$ — неустойчива. В частности, изотермическая атмосфера всегда устойчива, но

адиабатическое распределение ($dS/dr = 0$) находится на грани устойчивости.

Обычно $S = S(T, P)$, т.е. для устойчивости необходимо

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dr} > 0.$$

Отсюда получаем условие на градиент температуры

$$\left|\frac{dT}{dr}\right| < \left|\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dr}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P}\right| \equiv \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{адиаб}}.$$

При данном уравнении состояния температура должна падать не слишком быстро, не быстрее адиабатического градиента $|dT/dr|_{\text{адиаб}}$. В противном случае замена слоев энергетически выгодна. Наименьшее значение адиабатический градиент достигает в области ионизации — вся энергия идет на ионизацию. Обычно эти области конвективно неустойчивы.

В области, где лучистое равновесие дает $dS/dr < 0$, возникает неустойчивость, поэтому задачу приходится решать в два приема. Сначала предположим, что конвекции нет, решим задачу о лучистом переносе и найдем равновесное распределение. В результате получим распределение энтропии $S(r)$. В областях, где S растет с радиусом, решение устойчиво, но там, где S падает, нужно сконструировать новое решение с конвективным переносом энергии (см. рис. 25). В области конвекции практически $S = \text{const}$.

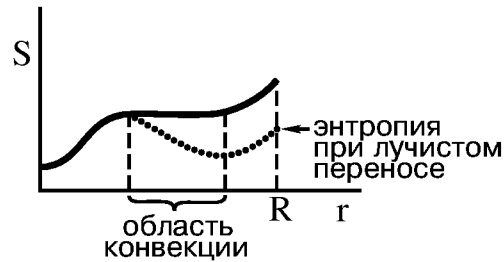


Рис. 25:

Внешняя конвективная зона наблюдается на ближайшей к нам звезде — Солнце. Наличие этой зоны приводит к ряду замечательных явлений. Появляющийся в результате конвекции механический поток энергии нагревает корону до температуры порядка 10^6 К и приводит к истечению солнечного ветра. Взаимодействие конвекции и вращения приводит к генерации магнитного поля, образованию пятен и активности Солнца. Эти интересные явления составляют предмет отдельной науки — физики солнечной активности, которая выходит за рамки нашего курса. Нужно только помнить, что Солнце — самая обычная и очень спокойная звезда. На других звездах могут происходить подобные явления или еще более мощные. По-видимому, некоторые из них мы наблюдаем в виде вспышек карликовых звезд (аналогичных хромосферным вспышкам на Солнце), но большинство из них пока недоступны нашим приборам. Развитие наблюдений, например, рентгеновской астрономии скоро сделает эти проблемы насущными для физики звезд.