

Глава 5. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

§ 5.1. Свойства ядерных сил

В основе теории ядерных реакций лежат представления о ядерных силах, ядерных взаимодействиях. Ниже мы дадим тот необходимый минимум знаний о ядерных превращениях, который позволит дать представление о том, что же происходит в центральных областях звезды.

По сравнению с остальными известными в физике взаимодействиями ядерные являются наиболее сильными. Характерная энергия ядерных сил $\sim 10\text{--}20$ МэВ/нуклон. Они больше гравитационных в 10^{40} раз, электромагнитных в ~ 100 раз. Ядерные силы являются короткодействующими, их потенциал пропорционален $e^{-\mu r}/r$, где $\mu \simeq 10^{13}$ см $^{-1}$, т.е. на больших расстояниях ($r > 1/\mu \approx 10^{-13}$ см) они убывают экспоненциально быстро, но на малых радиусах преобладают над всеми остальными (см. рис. 26).

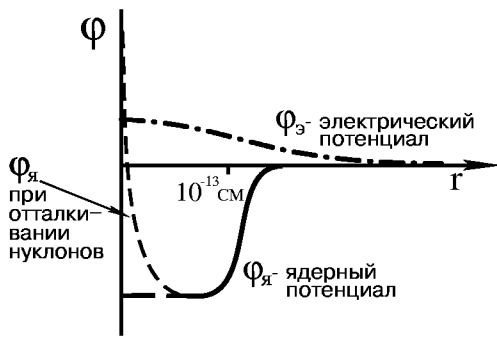


Рис. 26:

В настоящее время неизвестно, как ведет себя потенциал ядерного взаимодействия на малых расстояниях при $r \rightarrow 0$: либо он выходит на константу, либо вообще силы притяжения сменяются отталкиванием. Однако из-за принципа неопределенности, вид потенциальной ямы вблизи нуля не очень существен для расчета связанных состояний. Например, в атоме водорода вблизи ядра кулоновский потенциал ($\sim e/r$) порядка 10^6 В, но основной (самый низкий) уровень имеет энергию связи всего 13,6 эВ. Более низких уровней (соответствующих меньшим расстояниям между электроном и протоном) нет в силу принципа неопределенности. Поэтому детали поведения потенциала на очень малых расстояниях неважны.

Ядерные силы одинаковым образом действуют как на протоны, так и на нейтроны. Это свойство ядерных сил называется изотопической инвариантностью. Изотопическая инвариантность относится к силам, но важно учитывать еще и принцип Паули, согласно которому две одинаковые частицы (два протона или два нейтрона) не могут находиться в одном и том же состоянии.

§ 5.2. Простейшие примеры

1. Ядро, состоящее из протона и нейтрона — дейтерий:

$$pn = {}^2\text{D} \quad E_{\text{связи}} = 2,2 \text{ МэВ.}$$

Орбитального движения нет ($l = 0$), но спины p и n параллельны, спин ядра $s = 1$ и полный момент $J = 1$. Энергия связи 2,2 МэВ относительно невелика, т.е. состояние очень мелкое, ${}^2\text{D}$ — рыхлая система.

Могут ли быть в таком состоянии два протона He или два нейтрона (динейтрон)? В опытах таких ядер не нашли. И это неудивительно. В дейтроне $l = 0$ и спины параллельны, т.е. две разные частицы (p и n) находятся в одном и том же состоянии, но две тождественные частицы (два фермиона — два протона или два нейтрона) в такое состояние уложить нельзя. Можно было бы образовать ядро из двух тождественных частиц с $l \neq 0$. Но это означало бы пролет одной частицы около другой на некотором прицельном расстоянии. При этом среднее расстояние между нуклонами увеличивается и ядерные силы ослабевают. Есть еще одна возможность: взять ядро из двух нуклонов с $l = 0$ и $s = 0$, т.е. с антипараллельными спинами. Однако зависимость ядерных сил от спинов такова, что они сильнее, когда спины параллельны и слабее в обратном случае. В случае двух нуклонов (когда энергия связи основного уровня при $s = 1$ невелика — 2,2 МэВ) это приводит к тому, что связанных состояний с антипараллельными спинами вообще нет. Не надо думать, что это есть результат какого-нибудь отталкивания. На самом деле это еще одно проявление принципа неопределенности: для существования связанных состояний необходимо достаточно сильное взаимодействие. Исследование рассеяния нейтронов на протонах и протонов на протонах показывают, что в состоянии $s = 0$ они притягиваются, но не достаточно сильно.

2. Тритий (${}^3\text{T}$); pnn , $l = 0$, $s = 1/2$, причем спины нейтронов антипараллельны. Энергия связи $E_{\text{св}} = 8,48$ МэВ, т.е. такую энергию нужно затратить, чтобы разбить ядро трития на три частицы.

3. Гелий-3 (${}^3\text{He}$); ppn , $l = 0$, $s = 1/2$. Здесь антипараллельны спины протонов, $E_{\text{св}} = 7,72$ МэВ. В приближении изотопической инвариантности энергии связи ${}^3\text{T}$ и ${}^3\text{He}$ были бы равны, но в следующем приближении влияет кулоновская энергия отталкивания между двумя протонами в ${}^3\text{He}$, поэтому ${}^3\text{He}$ не так сильно связан.

4. Гелий-4 (${}^4\text{He}$); $ppnn$, $l = 0$, $s = 0$, $E_{\text{св}} = 28,3$ МэВ.

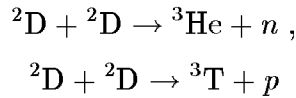
Если есть два сорта частиц, то максимально можно использовать 4 частицы, чтобы сконструировать ядро с $l = 0$ и $s = 0$. Чтобы оторвать один нуклон, нужно затратить энергию порядка $20 \text{ МэВ} = (28 - 8) \text{ МэВ}$. Таким образом, эта система чрезвычайно сильно связана. Поскольку оболочка $l = 0$ заполнена, ядро ${}^4\text{He}$ аналогично химически благородным газам, инертность которых объясняется заполненностью электронных оболочек.

5. Образование ядер ${}^5\text{He}$, ${}^5\text{Li}$ в связанном состоянии невозможно. Однако есть ${}^6\text{He}$ с $E_{\text{св}} = 0,6$ МэВ и ${}^8\text{He}$ с $E_{\text{св}} = 3,0$ МэВ. (Существование ${}^6\text{He}$ известно давно, ${}^8\text{He}$ предсказан одним из авторов в 1960 г. и лишь после этого открыт на опыте (см. А.И.Базь, В.И.Гольданский, В.З.Гольдберг, Я.Б.Зельдович. Легкие и промежуточные ядра вблизи границ нуклонной ста-

бильности. М., “Наука”. 1972).) Эти ядра устойчивы относительно сильного взаимодействия (относительно распада на составные части).

Если нет специальных причин и если хватает энергии, то ядерные реакции, состоящие в перестановке n и p , идут с сечением $\sigma \sim \pi r^2 \sim 10^{-26} - 10^{-24} \text{ см}^2$.

Например, реакции



сводятся к энергетически более выгодной перегруппировке нуклонов. При этом никакие другие взаимодействия не участвуют и задача фактически является классической задачей о столкновении шариков. Сечение такого процесса порядка квадрата радиуса “шариков” (в данном случае $r \approx 10^{-13} \text{ см}$). В ядерной физике принята единица сечения 1 барн = 10^{-24} см^2 .

Когда говорят, что ядро некоторого элемента, например ${}^5\text{He}$, не существует, то это означает, что время существования такого элемента не больше времени пролета частицы через ядро = $10^{-13} \text{ см} / 10^9 \text{ см/с} = 10^{-22} \text{ с}$. Скорость 10^9 см/с соответствует энергии в несколько МэВ, а получающееся время 10^{-22} с есть характерное время ядерного взаимодействия.

§ 5.3. Учет электромагнитного взаимодействия частиц

Электромагнитное взаимодействие играет роль поправки к ядерным силам — мы видели это на примере ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{T}$. Другой более сильный пример: ядро ${}^8\text{He}$ — связано, но с заменой двух нейтронов на два протона, не существует из-за кулоновского отталкивания. С учетом принципа Паули наиболее компактно можно уложить ядро с равным числом протонов и нейтронов, но из-за кулоновского отталкивания выгоднее брать несколько больше нейтронов. Например, ${}^{238}_{92}\text{U}$ состоит из 146 нейтронов и 92 протонов, т.е. нейтронов в 1,5 раза больше. По этой же причине тяжелые ядра неустойчивы относительно деления.

Без кулоновского отталкивания две “ядерные капли” стремились бы слиться. Объемные энергии при этом просто складываются, а поверхностная — уменьшается, так как поверхность большой капли меньше суммы поверхностей двух малых. Однако, вследствие того что кулоновские силы спадают по степенному закону, а ядерные — по экспоненциальному, в крупных каплях (ядра с большим Z) далекие протоны уже не притягиваются друг к другу за счет ядерных сил, а только отталкиваются за

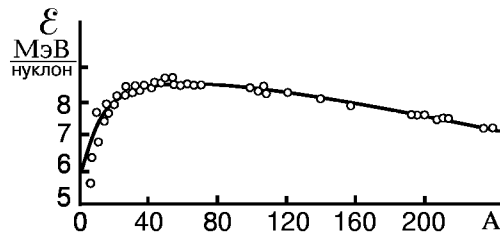
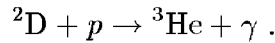
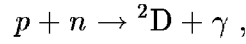


Рис. 27:

счет кулоновских. Таким образом, кулоновская энергия не очень существенна в легких ядрах и важна в тяжелых, вследствие чего ядра с промежуточными значениями Z (Fe) наиболее прочно связаны (см. рис. 27).

Количественные поправки к энергии — это одна сторона дела. Другой важный аспект учета электромагнитных взаимодействий — это процессы рождения и поглощения фотонов:



Реакция ${}^2\text{D} + {}^2\text{D} \rightarrow {}^3\text{T} + p$ и подобные ей напоминают игру в кубики — они сводятся просто к перегруппировке нуклонов. Здесь же происходит нечто новое — рождение частиц (фотона не было, потом он родился). Из-за закона сохранения энергии реакция $p + n \rightarrow {}^2\text{D} + \gamma$ не может идти без испускания фотона. Притяжение протона к нейтрону всегда есть, но если нуклоны сближаются и не рожают никакой частицы, то энергия сохраняется и они обязаны разлететься.

Теперь в сечение взаимодействия $p + n = \text{D} + \gamma$ войдет вероятность рождения фотонов, т.е. появляется множитель $e^2/\hbar c = 1/137$. Рассмотрим процесс рождения фотонов на примере классического осциллятора. Для колеблющегося заряда e энергия, выделяющаяся в единицу времени,

$$Q \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right] \simeq \frac{e^2}{c^3} \dot{x}^2 = \frac{e^2 r^2 \omega^4}{c^3} .$$

Время излучения одного кванта $\hbar\omega$

$$t = \frac{\hbar\omega}{Q} ,$$

а вероятность этого процесса $W \sim 1/t$, таким образом, равна

$$W = \frac{1}{t} = \frac{Q}{\hbar\omega} = \omega \frac{e^2}{\hbar c} \frac{r^2}{\lambda^2}$$

(здесь $\lambda = c/\omega$).

По порядку величины это выражение годится для любой системы и вероятность ядерных превращений с учетом электромагнитного взаимодействия

$$W \simeq \omega \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 .$$

Для простой перегруппировки вероятность $W \sim 1/t \sim \omega$. Теперь входят безразмерные величины $e^2/\hbar c$ — сила взаимодействия и $(r/\lambda)^2$ — отношение площади “антенны” к квадрату длины волны. Это верно при дипольных колебаниях. Если колебания имеют другую мультипольность, то входят более высокие степени (r/λ) .

З а д а ч а. Известно сечение реакции $n + p \rightarrow D + \gamma$,

$$\sigma = \frac{\text{const}}{v} = 0,3 \text{ барн}$$

при $v = 2,7 \cdot 10^5$ см/с (такая скорость соответствует скорости нейтронов при комнатной температуре). При высокой температуре, когда есть фотоны с энергией больше 2,2 МэВ, очевидно, будет происходить и обратный процесс фотодиссоциации дейтерия, и изменение концентрации дейтерия со временем описывается уравнением

$$\frac{d[D]}{dt} = \sigma v [n] [p] - f(T) [D],$$

здесь $[D]$ — концентрация D, $f(T)$ — некоторая функция. В термодинамическом равновесии $\frac{d[D]}{dt} = 0$ и

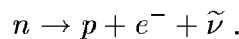
$$\frac{[n] [p]}{[D]} = F(T) \exp(-2,2 \text{ МэВ}/kT).$$

Найти функции $f(T)$, $F(T)$ и сечение фотодиссоциации дейтерия в зависимости от температуры.

(У к а з а н и е: пренебречь единицей в формуле Планка, т.е. считать $(e^x - 1)^{-1} \simeq e^{-x}$).

§ 5.4. Слабое взаимодействие

Типичный пример слабого взаимодействия — превращение нейтрона в протон с испусканием электрона и антинейтрино $\tilde{\nu}$:



Взаимодействие называется слабым из-за малой скорости распада. Время жизни свободного нейтрона порядка 10 мин. Выше мы рассматривали реакции с характерными временами 10^{-22} с для чисто ядерного взаимодействия и 10^{-16} с с участием электромагнитного взаимодействия, т.е. с испусканием γ -квантов.

Подчеркнем, что при слабых взаимодействиях, как и при электромагнитных, реакции идут с рождением новых частиц, т.е. число частиц не сохраняется. Ни в коем случае нельзя считать, что e^- и $\tilde{\nu}$ “сидят” в нейтроне, что нейтрон есть связанная система из протона и электрона. Нейтрон так же элементарен, как и протон³. Частицы действительно рождаются. Здесь можно провести аналогию со звуком: коснемся струны — рождаются фононы.

³Согласно современной теории нейтроны, протоны и все другие сильновзаимодействующие частицы состоят из кварков. Однако на физических процессах в звездах это не сказывается.

В реакциях такого рода можно переносить частицу справа налево и слева направо (с обязательной заменой частицы на античастицу):

$$\begin{aligned} e^+ + n &\rightleftharpoons p + \tilde{\nu}, \\ \nu + n &\rightleftharpoons p + e^-, \\ p &\rightleftharpoons n + e^+ + \nu. \end{aligned}$$

Чем отличается антинейтрино $\tilde{\nu}$ от нейтрино ν ? Для ν и $\tilde{\nu}$ масса покоя $m = 0$, заряд $e = 0$ и, казалось бы, различий между ними нет. Отличаются они по типу реакций, в которых участвуют. Например, вблизи реактора экспериментально наблюдалась реакция $\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+$ и нет реакции $\nu + n \rightarrow p + e^-$, так как реактор дает только антинейтрино. Если бы эти частицы были тождественны (как фотон и антифотон), то ничто не мешало бы получить реакцию $\nu + n \rightarrow p + e^-$. Так же по типу реакций было открыто, что нейтрино бывают двух сортов: нейтрино электронное ν_e и нейтрино мюонное ν_μ . Последние участвуют в реакциях типа

$$p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu,$$

где μ^- — мю-мезон⁴.

Следующий важный момент слабых взаимодействий: как понимать реакцию $p \rightarrow n + e^+ + \nu$? Ведь протон стабилен. Мы писали реакции только с учетом законов сохранения зарядов. Но нужно также удовлетворить еще и закону сохранения энергии. Однако сохранение заряда — абсолютно, а на энергию системы можно воздействовать извне.

Масса нейтрона равна

$$m_n = M_H + 0,78 \text{ МэВ} = m_p + m_e + 0,78 \text{ МэВ},$$

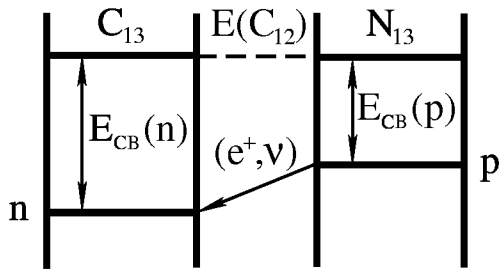
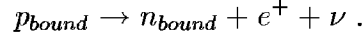


Рис. 28:

где M_H — масса атома водорода (ясно, что $M_H = m_p + m_e$, поскольку энергией связи электрона в атоме водорода $\sim 13,6$ эВ можно пренебречь). Поэтому реакция $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ в свободном состоянии идти не может — не хватает энергии. Но возьмем связанные n и p в системах: $^{13}\text{C} = ^{12}\text{C} + n$ и $^{13}\text{N} = ^{12}\text{C} + p$ (см. рис.28). По ядерным силам ^{12}C одинаково взаимодействует как с p , так

⁴В последние годы открыта еще более тяжелая частица, подобная e и μ по своим свойствам $-\tau^\pm$. По-видимому, есть и еще один тип нейтрино ν_τ , отличающийся от ν_e и ν_μ и соответствующее ему $\tilde{\nu}_\tau$ (подобно $\tilde{\nu}_e$ и $\tilde{\nu}_\mu$). Подробнее см. § 7.4.

и с n , но кулоновское отталкивание уменьшает энергию связи протона. Связанный в ядре ^{12}C протон p_{bound} оказался “тяжелее” связанного нейтрона, поэтому может идти реакция $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$, т.е.



Стабильность протона и нестабильность нейтрона в некотором смысле условны, так как в связанном состоянии стабильным может оказаться нейтрон, а не протон.

Пойдет ли реакция $p + e^+ \rightarrow n + \nu$? Ведь $m_n > m_p + m_e$ и нейтрон должен распадаться. В силу этого неравенства реакция не пойдет ни в атоме водорода, ни в плазме малой плотности и температуры: $\rho < 10^4 \text{ г/см}^3$, $T < 10^9 \text{ К}$. Однако реакция пойдет либо в случае, когда нейтрон сильно связан, либо когда электрон имеет большую энергию. Типичный пример: $^7\text{Be} + e^- = ^7\text{Li} + \nu$, нейтрон в Li крепко связан. Большая энергия электронов может быть обусловлена либо высокой температурой, либо их вырождением при большой плотности. Например, в вырожденном газе при высоком давлении реакция $p + e^+ \rightarrow n + \nu$ идет при ферми-энергии электронов $E_f > 0,78 \text{ МэВ}$. В этом случае эта реакция носит название реакции нейтронизации вещества — главный момент в теории пульсаров и нейтронных звезд.

Такие реакции могли бы идти и в горячей плазме, когда энергия электронов достаточно высока: но там есть более эффективные реакции с испусканием γ -квантов, которые быстро отнимают энергию у электронов. Поэтому в разреженной плазме нейтронизация пренебрежима из-за слабости взаимодействия. К тому же нейтрон распадается обратно на протон и электрон (с образованием $\tilde{\nu}$). Интересно заметить, что в той же горячей плазме, когда выход излучения из системы затруднен (большая непрозрачность вещества), процессы слабого взаимодействия с образованием нейтрона и их распадом могут эффективно отводить энергию через испускание ν и $\tilde{\nu}$ (так называемые урка-процессы, см. § 7.4).

Слабые взаимодействия называются четырехфермионными, так как в реакциях участвуют 4 ферми-частицы со спином $s = 1/2$.

Вероятность взаимопревращения частиц за счет слабого взаимодействия по аналогии с теорией электромагнитного излучения записывается в виде

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H'|^2 \frac{dN}{dE} [c^{-1}] ,$$

где dN/dE — число конечных состояний на единичный интервал энергии, а H' — матричный элемент гамильтониана взаимодействия, определяющий, таким образом, комплексную амплитуду вероятности процесса. В простейшей теории слабых взаимодействий полагают, что

$$H' = g \int \psi_p^* \psi_e^* \psi_\nu \psi_n dV ,$$

где g — постоянная слабого взаимодействия, а $\psi_n, \psi_p, \psi_e, \psi_\nu$ — волновые функции частиц. В это выражение необходимо подставлять ψ или ψ^* (сопряженную волновую функцию) соответственно тому, уничтожается или рождается частица. Выражение H' написано для распада нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$, поэтому мы пишем ψ_p^*, ψ_e^* . Волновая функция нейтрино ψ_ν пишется без звездочки, так как рождение антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ эквивалентно уничтожению ν_e . Важный момент — размерность g . Так как размерность $[H] = \text{эрг}$, а $\int \psi^2 dV = 1$, т.е. $[\psi] = \text{см}^{-3/2}$, то $[g] = \text{эрг} \cdot \text{см}^3$. Заметим, что константа электромагнитного взаимодействия $e^2/\hbar c = 1/137$ безразмерна. В системе CGS численно $g = 1,4 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$. Зная g (из опыта), можно определить вероятность распада $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$. Пусть энергии выделилось много, тогда электрон e^- — релятивистский, и m_e не должна входить в ответ. Вероятность W пропорциональна квадрату матричного элемента, т.е. пропорциональна g^2 . Необходимо подобрать такую комбинацию степеней E, \hbar и c , чтобы получить размерность $[W] = \text{с}^{-1}$:

$$W \sim g^2 E^n \hbar^m c^p,$$

т.е.

$$\begin{cases} 2 + n + m = 0 \\ 10 + 2n + 2m + p = 0 \\ -4 - 2n - 2m - p = -1, \end{cases}$$

откуда $n = 5, m = -7, p = -6$.

Точная формула имеет вид

$$W = \frac{1}{60\pi^3} \frac{g^2 E^5}{\hbar^7 c^6},$$

где коэффициент $1/60\pi^3$ получен из конкретного расчета.

З а д а ч а 1. Рассмотрим реакцию

$$e^- + p \rightarrow n + \nu.$$

Пусть энергия электронов $5 \text{ МэВ} < E_e < 100 \text{ МэВ}$. Тогда протон и нейтрон можно считать покоящимися. Построить по размерности выражение для $\sigma[\text{см}^2]$:

$$\sigma(E) \sim g^2 E^n \hbar^m c^p.$$

З а д а ч а 2. Найти вероятность нейтронизации в вырожденном газе релятивистских электронов

$$W = c \int_{E_0}^{E_f} \sigma(E) \frac{dN}{dE} dE$$

(E_0 — пороговая энергия нейтронизации).

§ 5.5. Ядерные реакции в звездах

Эйнштейновское соотношение между массой и энергией вещества $E = mc^2$ показывает, что ядерные реакции могут быть источником энергии звезд. В самом деле, масса четырех протонов больше массы ядра гелия: $4m_p > m_{\text{He}}$, и образование последнего в результате слияния четырех протонов должно происходить с огромным выделением энергии, равным разности массы — дефекту масс $\Delta E = (4m_p - m_{\text{He}})c^2$. Однако долгое время до появления квантовой механики казалось, что температура вещества в центре звезды, $T \sim GM/(Rr) \sim 1$ кэВ, слишком низка. Для преодоления кулоновского отталкивания при столкновении двух протонов необходима энергия порядка 1 МэВ. При максвелловском распределении с температурой ~ 1 кэВ энергией в 1 МэВ обладает доля частиц $\sim \exp\left(-\frac{1 \text{ МэВ}}{1 \text{ кэВ}}\right) \simeq e^{-1000} \simeq 10^{-430}$ (отметим, что в Солнце всего 10^{57} частиц, т.е. классическая вероятность взаимодействия двух протонов ничтожна). Тем не менее один из основателей теории внутреннего строения звезд А. Эдингтон, первый указавший на возможность реакции $\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$, не сдавался, когда ему указывали на малую вероятность из-за недостаточно высокой температуры, и говорил: “Поищите-ка место погорячее!”.

С развитием квантовой механики стало ясно, что Эдингтон прав! Вероятность ядерных реакций увеличивается благодаря подбарьерному переходу (туннельный эффект).

Оценим скорость ядерных реакций с учетом законов квантовой механики. Напомним известное соотношение Де Бройля, связывающее длину волны λ (волновое число $k = 2\pi/\lambda$) и импульс частицы p : $k = p/\hbar$. Движению с импульсом p соответствует волновая функция $e^{ikx} \rightarrow e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ или $e^{\frac{i}{\hbar} \int p dx}$, если p является функцией координат. Для частиц с массой покоя m импульс p найдем из закона сохранения энергии

$$p^2/(2m) = E_{\text{кин}} = E_{\text{полн}} - U = E_0 - U.$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2m(E_0 - U)}.$$

Для двух частиц с зарядами Z_1, Z_2 энергия отталкивания

$$U = Z_1 Z_2 e^2 / r.$$

В классической механике частица с энергией E при достижении точки r_1 , где $p = 0$, т.е. $r_1 = Z_1 Z_2 / E$, поворачивает и движется в обратную сторону. В квантовой теории при $r < r_1$ $p = i\sqrt{2m(U - E_0)}$, и в волновую функцию частицы, идущей с бесконечности, войдет множитель

$$e^{-\frac{1}{\hbar} \int_r^{r_1} \sqrt{U - E_0} dx},$$

т.е. существует конечная вероятность $\psi^2 \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{r_1} \sqrt{U-E_0} dx}$ прохождения частицы в область $r < r_1$ (см. рис. 29).

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{r_1} \sqrt{U-E_0} dr &= 2 \int_0^{r_1} \sqrt{2m \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E_0 \right)} dr = \\ &= 2r_1 \sqrt{2mE_0} \int_0^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \frac{dr}{r_1}. \end{aligned}$$

Пусть

$$x = r/r_1, \quad \int_0^{r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1} \frac{dr}{r_1} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx.$$

При $x \rightarrow 0$ подынтегральное выражение $\rightarrow \infty$, однако интеграл сходится:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что сходимость интеграла позволяет нам вести интегрирование от нуля, а не от радиуса ядерного взаимодействия r_2 , который составляет $\sim 10^{-3} r_1$. Ясно, что такое приближение (замена $r_2 \rightarrow 0$) даст лишь небольшой поправочный множитель.

При точном вычислении вероятности перед экспонентой есть еще степенные множители, которые мы не учитываем. Для нас сейчас важна только экспонента.

Итак, $\psi^2(0) = e^{-\varphi}$, где

$$\varphi = \frac{\sqrt{2\pi} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{mc^2}{E_0}}.$$

Выше предполагалось, что одно из ядер покоится ($m_2 = \infty$). На самом деле при расчете в системе центра масс вместо m следует, как обычно, подставить приведенную массу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда

$$\varphi = \frac{\sqrt{2\pi} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{\mu c^2}{E_0}} = \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v_0},$$

где v_0 — относительная скорость частиц на бесконечности. В таком виде видна безразмерность φ (аналогично $e^2/(\hbar c)$).

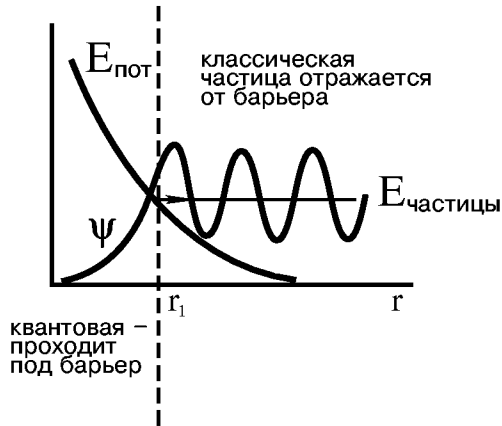


Рис. 29:

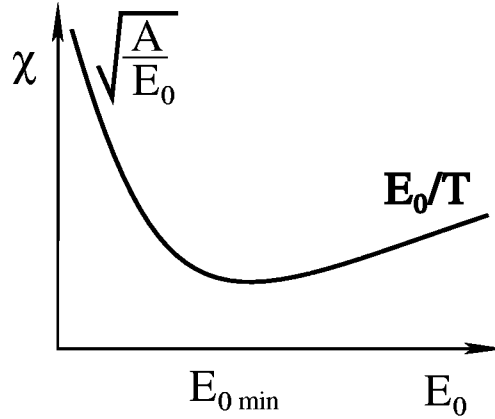


Рис. 30:

Мы получили вероятность подбарьерного сближения частиц с данной энергией E_0 : $\sim e^{-\sqrt{\frac{A}{E_0}}}$, где $A = \frac{2\pi^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_p$ (A_1, A_2 — атомные массы ядер). В тепловом равновесии (при температуре T) количество частиц с энергией E_0 пропорционально $e^{-\frac{E_0}{T}}$ и полная вероятность

$$\omega \sim \int e^{-\chi} dE_0, \text{ где } \chi = \sqrt{\frac{A}{E_0}} + \frac{E_0}{T}.$$

Функция $\chi(E_0)$ имеет минимум при некотором значении $E_{0 \min}$ (см. рис.30). Очевидно, что область минимума даст главный вклад в интеграл, так как $e^{-\chi}$ в этой точке имеет острый максимум. Вычисление таких интегралов проводится методом перевала. Сначала находим экстремум:

$$\frac{d\chi}{dE_0} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{A}}{E_0^{3/2}} + \frac{1}{T} = 0, \quad E_{0 \min} = \left(\frac{T\sqrt{A}}{2} \right)^{2/3},$$

$$\chi_{\min} = 3 \cdot 2^{-2/3} \left(\frac{A_1}{T} \right)^{1/3} = \left(\frac{\alpha}{T} \right)^{1/3},$$

$$\alpha = \frac{27\pi^2}{2} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(\hbar c)^2} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m_p c^2,$$

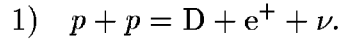
$$\left(\frac{\alpha}{T} \right)^{1/3} = 4,25 \cdot T_9^{-1/3} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} Z_1^2 Z_2^2 \right)^{1/3}.$$

Здесь $T_9 = T/10^9$ К — температура в млрд. градусов. Теперь можно разложить $\chi(E_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $E_{0 \min}$:

$$\chi = \chi_{\min} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial E_0^2} (E_0 - E_{0 \min})^2, \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial E_0} = 0 \right).$$

Итак, $\omega = e^{-\lambda_{\min}^2}$ с некоторым множителем, получающимся от интегрирования второго члена, которое сводится к интегралу вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (проведите это интегрирование!). Так мы нашли только вероятность сближения ядер. Полная вероятность реакции получится после умножения на вероятность соответствующего взаимодействия.

Перейдем к конкретным реакциям.



Выделение энергии в этой реакции $Q = 1,442$ МэВ, в том числе $\sim 0,25$ МэВ уносят нейтрино.

Число ядер дейтерия D, рождающихся в 1 см^3 на 1 с , равно

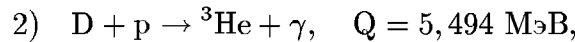
$$\frac{d[D]}{dt} = \frac{1}{2} \frac{n_p^2}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 4,2 \cdot 10^{-15} T_9^{-2/3} e^{-3,38/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1} \text{ см}^3].$$

Вводя весовые доли для химических элементов

$$X_i = \frac{m_H n_i A_i}{\rho} = \frac{n_i A_i}{6 \cdot 10^{23} \rho},$$

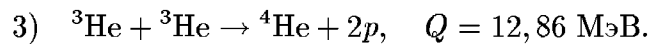
получим

$$\frac{dX_D}{dt} = 4,2 \cdot 10^{-15} \rho X_H^2 T_9^{-2/3} e^{-3,38/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1}].$$



$$\frac{dX_{{}^3\text{He}}}{dt} = 3,98 \cdot 10^3 \cdot X_H X_D \rho T_9^{-2/3} e^{-3,72/T_9^{1/3}} [\text{с}^{-1}].$$

Укажем на большую разницу (10^{18} раз) в отношении коэффициентов в первой и во второй реакции. Это объясняется тем, что первая реакция идет со слабым взаимодействием на лету, а во второй все определяется электромагнитным взаимодействием. Отметим также, что вторая реакция в условиях земных морей и океанов “зарезается” экспонентой, несмотря на большой множитель, стоящий перед ней.



Скорость реакции:

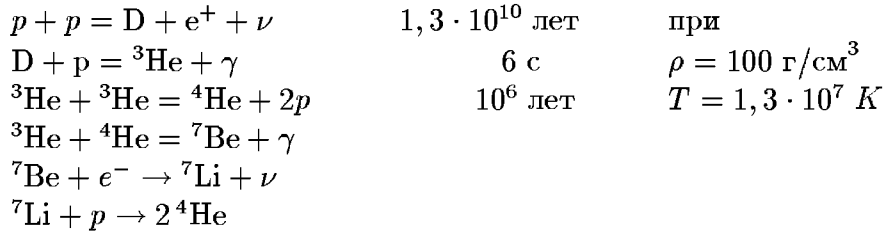
$$\frac{dX_{{}^4\text{He}}}{dt} = 1,3 \cdot 10^{10} \rho X_{{}^3\text{He}}^2 T_9^{-2/3} e^{-\frac{12,28}{T_9^{1/3}}} [\text{с}^{-1}].$$

Здесь множитель еще больше, так как реакция идет по сильному взаимодействию.

Итак, мы видим, что благодаря цепочке реакций 1), 2), 3) возможно превращение четырех ядер водорода в ядро гелия с выделением энергии

$(m_{\text{He}}^4 - 4m_{\text{H}})c^2$. Эта цепочка реакций может идти при достаточно высокой температуре в абсолютно чистом водороде и называется протон-протонным (или pp -) циклом. Возможны и другие цепочки протон-протонного цикла.

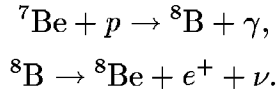
Расчет показывает, что при низких температура ($T < 2 \cdot 10^7$ К реакции идут в основном по двум следующим схемам:



Справа указано характерное время реакций (как оно вычислено?).

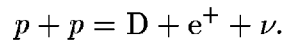
Ясно, что без участия слабого взаимодействия водород в He не превратится, так как из протонов надо получить нейтроны. свободный протон в нейтрон не превращается — это возможно только в поле другого протона, который его подхватывает. На одно ядро ${}^4\text{He}$ должно пройти две реакции $p + p \rightarrow \text{D} + e^+ + \nu$. На каждую реакцию $p + p$ во всем pp -цикле выделяется 13,086 МэВ энергии.

Вторая цепочка интересна потому, что дает побочные продукты:



Последний распад замечателен тем, что он дает нейтрино высокой энергией, в среднем $E = 8-9$ МэВ, которые можно детектировать на Земле (см. ниже).

Очевидно, что скорость выделения энергии в pp -цикле равна скорости, с которой идет первая реакция:



Дейтерий тут же вступает в реакцию с протоном. Поэтому он не накапливается и стационарная концентрация

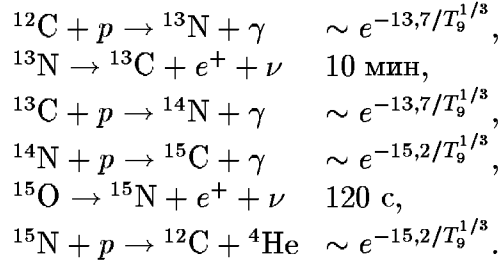
$$X_{\text{D}} = \frac{6c}{1,3 \cdot 10^{10} \text{ лет}} X_{\text{H}} = 10^{-17} X_{\text{H}}.$$

Выпишем полную скорость энерговыделения в pp -цикле:

$$\varepsilon_{pp} = \rho X_{\text{H}}^2 \varepsilon_0 (T/T_0)^n \text{ [эрг/(г} \cdot \text{с)]}$$

$T_0/10^6$	ε_0	n
1	$4 \cdot 10^9$	10,6
5	$1,8 \cdot 10^{-3}$	5,95
10	$6,8 \cdot 10^{-2}$	4,60
15	0,377	3,95
20	1,09	3,64
30	4,01	3,03

При температурах более высоких, чем солнечные (в более массивных звездах), идет CNO–цикл (он возможен только в присутствии катализатора углерода)



Обратите внимание на то, что в последней реакции снова образуется ядро ${}^{12}\text{C}$, с которого начиналась первая реакция. Отметим, что в отличие от pp –цикла здесь слабое взаимодействие идет на лету, т.е. слабое взаимодействие и подбарьерный переход разделены. Поскольку в CNO–цикле участвуют ядра с более высоким зарядами, он идет при более высокой температуре, причем зависимость от температуры более крутая, чем в pp –цикле. Энерговыделение во всем CNO–цикле в расчете на одну реакцию ${}^{14}\text{N} + p$ (самую медленную) равно 24,97 МэВ. Выпишем полную скорость энерговыделения в CNO–цикле:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} (T/T_0)^n \text{ [эрг/г с]}$$

$T_0/10^6$	ε_0	n
6	$9 \cdot 10^{-10}$	27,3
10	$3,4 \cdot 10^{-4}$	22,9
15	1,94	19,9
20	$4,5 \cdot 10^2$	18,0
30	$4,1 \cdot 10^5$	15,6
50	$6,2 \cdot 10^8$	13,6
100	$1,9 \cdot 10^{12}$	10,2

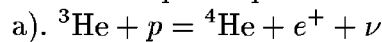
З а д а ч и.

1. Подсчитать, при какой температуре D выгорает за 10^6 лет. То же для ${}^3\text{He}$.

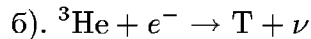
2. Найти условия, при которых энерговыделение

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = \varepsilon_{pp}.$$

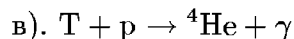
3. Вычислить скорость реакций:



(в этой реакции выделяются высокоэнергичные нейтрино),



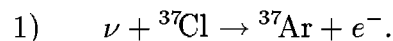
(указание: использовать экспериментальные данные по распаду $\text{T} + 3\text{He} + e^- + \tilde{\nu}$: энергия (не включая $m_e c^2$) 0,0186 МэВ, время жизни 12,26 лет. Рассмотреть равновесие с невырожденными электронами при высокой температуре),



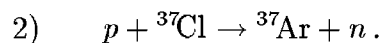
§ 5.6. Поиски солнечных нейтрино

Когда Р. Дэвис приступал к проведению своего эксперимента по регистрации нейтрино от Солнца, астрофизики не ожидали ничего сенсационного. Считалось, что этот опыт позволит просто уточнить параметры модели Солнца, так как благодаря нейтрино мы можем “заглянуть” в самые недра нашего светила. Однако результаты опыта оказали столь опешеломляющими, что многие горячие головы стали указывать на них как на доказательство отсутствия ядерных реакций на Солнце. На самом деле приходится к таким радикальным выводам на основе единственного, очень трудного и тонкого эксперимента, конечно, преждевременно. Но понимать сущность проблемы солнечных нейтрино необходимо каждому, кто хочет изучать физику и эволюцию звезд.

Для регистрации нейтрино в опыте Дэвиса применяется хлор-аргонный метод, предложенный еще в 1946 г. Б. Понтекорво. Под лействием нейтрино происходит реакция

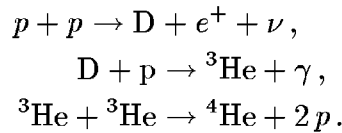


Порог этой реакции 0,814 МэВ. Бак, содержащий свыше 600 т перхлорэтлена (C_2Cl_4), помещен на глубине около 1,5 км в шахте. Это сделано для того, чтобы избавиться от фона космических лучей, рождающих протоны, которые тоже приводят к образованию ${}^{37}\text{Ar}$:

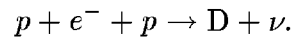


Образующийся в процессе 1) аргон — это инертный газ, он не вступает в химические реакции. Чтобы его извлечь, в бак добавлено очень немного ($3 \cdot 10^{19}$ атомов) изотопически чистого ${}^{36}\text{Ar}$. При продувании бака гелием пузырьки газа захватывают аргон (как ${}^{36}\text{Ar}$, так и ${}^{37}\text{Ar}$), который затем отделяют от паров гелия и паров C_2Cl_4 в сложной системе низкотемпературных конденсаторных ловушек, фильтров и т.п. В результате удается извлечь около 90% аргона, который помещают в миниатюрный пропорциональный счетчик (прибор типа счетчика Гейгера) с камерой меньше 1 см^3 . Этот счетчик и позволяет зарегистрировать присутствие ${}^{37}\text{Ar}$, так как этот изотоп аргона нестабилен: он захватывает K -электрон, превращаясь снова в ${}^{37}\text{Cl}$, согласно реакции 1), где стрелочку следует повернуть в обратную сторону. Период полураспада ${}^{37}\text{Ar}$ составляет 35 дней. Регистрация K -захвата возможна потому, что в освободившееся состояние в K -оболочке переходит электрон с верхнего уровня. Лишь в 7% случаев энергия этого электрона уносится фотоном, а в 93% — еще одним электроном, покидающим атом (эффект Оже). Именно эти Оже-электроны и позволяют отождествить отсчеты, связанные с распадом ${}^{37}\text{Ar}$, так как они имеют характерную энергию 2,8 кэВ. Такой метод позволяет обнаружить ${}^{37}\text{Ar}$, если его во всем огромном баке с перхлорэтиленом всего 10 атомов.

Разберемся теперь, что же ожидали получить от этой установки. Превращение водорода в гелий не может обойтись без слабого взаимодействия, так как при образовании ядра гелия 2 протона должны превратиться в нейтроны. Таким образом на каждое ядро гелия должно выделиться 2 нейтрино. Какие из них могут в принципе наблюдаться в опыте Дэвиса? Рассмотрим основную цепочку протон-протонного цикла:

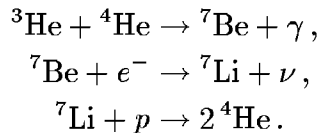


В стандартной модели Солнца (масса = M_{\odot} , светимость = L_{\odot} , радиус = R_{\odot} , доля тяжелых элементов $Z/X = 0,019$, возраст = $4,7 \cdot 10^9$ лет) по этой цепочке образуется 86% из всех вновь создаваемых ядер гелия. Однако максимальная энергия нейтрино в первой реакции всего 0,420 МэВ. Правда с вероятностью 0,0025 вместо первой реакции может пойти процесс:



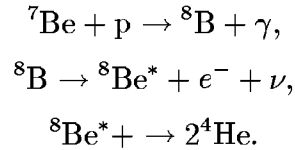
Здесь ν выделяется фактически с постоянной энергией 1,44 МэВ, равной разности масс покоя D и $2p + e^-$, которая уже превосходит порог реакции 1). При данной светимости Солнца поток этих нейтрино практически не зависит от модели (конечно, в предположении, что светимость Солнца обусловлена термоядерным горением водорода). Благодаря потоку этих нейтрино на каждый атом ${}^{37}\text{Cl}$ на Земле должно происходить $0,3 \cdot 10^{-36}$ реакций 1) в секунду. Величину 10^{-36} захватов на атом мишени в секунду стали называть единицей солнечных нейтрино (SNU). Чувствительность установки Дэвиса недостаточна для измерения потоков порядка 0,3 SNU. Если бы поток оказался меньше 0,3 SNU, можно было бы поставить под сомнение термоядерное горение, или источник светимости Солнца. На самом же деле по данным 1978 г. зарегистрирован поток $1,2 \pm 0,3$ SNU. Что же неожиданного оказалось в результатах Дэвиса? Все дело в том, что полученный поток слишком низок по сравнению со стандартной моделью Солнца.

В 14% случаев в этой модели вместо слияния с ${}^3\text{He}$ ядро ${}^3\text{He}$ сливается с ${}^4\text{He}$ и идет цепочка



Из получаемых здесь “бериллиевых” нейтрино 90% имеют энергию 0,861 МэВ и тоже могут быть зарегистрированы (у 10% энергия 0,383 МэВ), давая в сумме с *pp*-нейтрино около 1,2 SNU. Еще примерно 0,1 SNU дают ν от CNO-цикла, который должен играть совсем незначительную роль внутри Солнца. Все это еще не противоречит опыту Дэвиса.

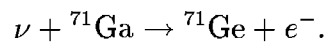
Противоречие наступает в третьей цепочке pp -цикла, которая протекает всего в 0,02% случаев:



Эта цепочка важна для опыта Дэвиса из-за большой энергии “борных” нейтрино: максимум непрерывного спектра этих ν составляет 14,06 МэВ. Из-за более высокой энергии сечение взаимодействия борных нейтрино в среднем на три порядка выше, чем у pp -нейтрино. По расчетам, проведенным до начала опыта Дэвиса, получали, что борные нейтрино дадут 30÷70 SNU, и только после первых результатов Дэвиса удалось “ужать” этот поток до 4,3 SNU (т. е. вся стандартная модель дает 5,6 SNU). Почему же возможен такой разброс в предсказаниях? Дело в том, что поток борных нейтрино очень резко зависит от температуры: для температур центра Солнца примерно T^{18} (это вызвано, главным образом, большим кулоновским барьером реакции ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$). Поэтому небольшие вариации в непрозрачности, уравнении состояния, в описании конвективного переноса могут слегка изменить температуру в центре, что может сильно оказаться на потоке нейтрино от распада ${}^8\text{B}$. Но никаким способом в рамках обычных представлений об эволюции Солнца не удастся объяснить наблюдаемый низкий поток.

Результаты Дэвиса породили огромный поток работ, пытающихся свести концы с концами в этой проблеме. Рассматривалась возможность перемешивания Солнца, его неоднородность по первичному химическому составу, распад нейтрино и т. д. Нам представляется, что разумно не спешить с выводами, дождаться результатов других наблюдений.

Принципиальное значение имело бы использование галлиевого детектора для регистрации реакции (предложенное В.А.Кузьминым)



Порог этой реакции всего 0,233 МэВ, время полураспада ${}^{71}\text{Ge}$ 11 дней, таким образом, эта реакция чувствительна к самым главным процессам pp -цикла. Здесь в стандартной модели ожидается 90 SNU (галлиевых), причем 63 SNU от первой pp -реакции. Трудность технического осуществления этого эксперимента связана, в частности, с ценой галлия. Чтобы иметь 1 событие в сутки, необходимо около 50 т галлия. Это будет стоить десятки миллионов долларов (или рублей). Но научное значение этого опыта очень велико и его проведение планируется как в США, так и в СССР. А галлий в конце концов не пропадет и не испортится. По окончании эксперимента его можно будет пустить на нужды промышленности.