

## Глава 6. СТРОЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

### § 6.1. Уравнения звездной структуры

В самой общей постановке расчет внутреннего строения звезд сводится к интегрированию четырех дифференциальных уравнений, каждое из которых мы подробно рассматривали в предыдущих главах. Выпишем сейчас их вместе.

1. Уравнение массы:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{или}$$

$$M_r = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr.$$

2. Уравнение гидростатического равновесия:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho.$$

3. Уравнение переноса энергии в диффузионном приближении:

$$L_r = -4\pi r^2 D \frac{d\varepsilon_r}{dr},$$

где  $\varepsilon_r = aT^4$  — плотность лучистой энергии и  $D = cl/3 = c/(3\kappa\rho)$  — ее коэффициент диффузии.

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}.$$

4. Уравнение энергетического баланса:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  [эрг/сг] — скорость выделения энергии.

Эти дифференциальные уравнения следует дополнить уравнением состояния

$$P = P(\rho, T, X, Y, Z)$$

и выражениями для непрозрачности и скорости выделения энергии

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y, Z),$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y, Z).$$

Величины  $X, Y, Z$  — весовые доли элементов: водорода ( $X$ ), гелия ( $Y$ ) и других ( $Z$ ). Отметим, что в современных расчетах выражение для  $\kappa$  используется в виде таблиц, хранящихся в памяти машины. Уравнение (3) справедливо только для лучистой теплопроводности. В области конвективного переноса энергии необходимо использовать условие изэнтропичности ( $dS/dr = 0$ ), которое через температуру записывается следующим образом:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}.$$

При расчетах обычно принимают следующий переходный химический состав звезды:  $X \simeq 0,7$ ;  $Y \simeq 0,28$ ;  $Z = 0,02$  для звезд галактической плоскости и  $Z = 10^{-3}$  для звезд шаровых скоплений.

Только что обособившуюся в результате конденсации межзвездного газа звезду разумно считать химически однородной. Как показывают расчет, эволюция звезды идет различными путями в зависимости от того, остается ли звезда химически однородной или же изменения химического состава происходят только там, где протекают ядерные реакции, т. е. в ее центральных областях. У маломассивных звезд ( $M < 0,5M_{\odot}$ ) конвекцией может быть охвачена большая часть звезды, поэтому здесь перемешивание приводит к тому, что химический состав меняется у всей звезды в целом. У более массивных звезд конвекция отсутствует вообще либо происходит в небольшой центральной части, где выделяется энергия, и для них изменение химического состава является функцией только лагранжевой координаты и пропорционально скорости выделения ядерной энергии:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{M_r} = -A\varepsilon.$$

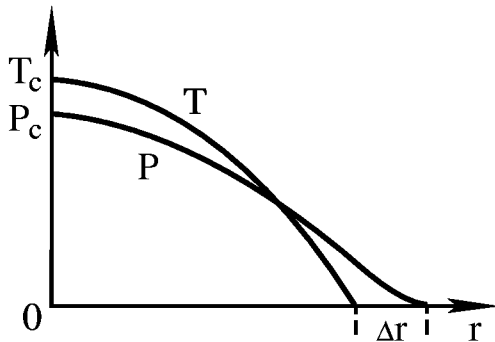


Рис. 31:

В центре можно варьировать два параметра  $P_c$  и  $T_c$ . Если теперь мы будем интегрировать эти уравнения с фиксированными начальными параметрами, то не всегда  $P$  и  $T$  обратятся в нуль одновременно на поверхности (рис. 31). Это условие ( $T_0 = 0, P_0 = 0$ ) накладывает дополнительное ограничение на  $P_c$  и  $T_c$ . Поэтому семейство решений будет однопараметрическим (по  $P_c$  или  $T_c$ ). При данном  $P_c$  есть одно  $T_c$ , такое

В дальнейшем будем рассматривать модели без конвекции. Итак, имеем четыре дифференциальных уравнения для величин  $M_r, P, T$  и  $L_r$  с граничными условиями:

$$\begin{aligned} M_r = 0, L_r = 0 & \quad \text{при } r = 0, \\ P = 0, T = 0 & \quad \text{на поверхности.} \end{aligned}$$

В центре можно варьировать два параметра  $P_c$  и  $T_c$ .

Если теперь мы будем интегрировать эти уравнения с фиксированными начальными параметрами, то не всегда  $P$  и  $T$  обратятся в нуль одновременно на поверхности (рис. 31). Это условие ( $T_0 = 0, P_0 = 0$ ) накладывает дополнительное ограничение на  $P_c$  и  $T_c$ . Поэтому семейство решений будет однопараметрическим (по  $P_c$  или  $T_c$ ). При данном  $P_c$  есть одно  $T_c$ , такое

что  $P_0 = 0$ ,  $T_0 = 0$ . Итак, при учете этого условия  $T_c = T_c(P_c)$ ,  $M = M(P_c)$ . Если бы мы рассматривали только механическое равновесие, то можно было бы варьировать два параметра (скажем  $M$  и  $S$ ). Но еще необходимо, чтобы выделение энергии и ее отвод компенсировали друг друга (условие теплового баланса). Это дополнительное условие ограничивает количество решений: для данного  $P_c$  есть единственная модель с одним значением массы, следовательно, для данной массы есть определенное значение  $P_c$  и определенная светимость<sup>5</sup>.

## § 6.2. Соотношение масса-светимость

Вид уравнений позволяет найти ряд соотношений для интегральных характеристик звезд (масса, светимость, радиус), не решая численно систему. Это можно сделать в том случае, когда непрозрачность  $\kappa$  и энерговыделение  $\epsilon$  степенным образом зависят от плотности и температуры. На самом деле эти зависимости различны для различных слоев, и, более того, в некоторых случаях вообще нельзя применять степенную аппроксимацию. Тем не менее для широкого класса “гладких” моделей получающиеся соотношения подтверждаются прямым численным расчетом.

В выражениях для непрозрачности будем пользоваться при низких температурах законом Крамерса:

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-7/2},$$

а при высоких — томпсоновской непрозрачностью:

$$\kappa = \kappa_T = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}.$$

При оценках будем производные заменять на отношения типа:

$$\frac{dM}{dr} \sim \frac{M}{R}, \quad \frac{dP}{dr} \sim \frac{P}{R} \quad \text{и т. д.}$$

Тогда первые три уравнения дают следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \rightarrow M = R^3 \rho_c, \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2} \rho \rightarrow P = \frac{GM}{R} \rho = GM^{2/3} \rho^{4/3}, \\ L_r &= -4\pi r^2 D \frac{d(aT^4)}{dr} \rightarrow L \sim R \frac{T^4}{\kappa \rho} \sim RT^{15/2} \rho^{-2}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>В принципе при данной массе могло бы быть несколько решений, но фактически это не так (формально, впрочем, можно было бы говорить о холодном решении как равноправном). Напомним, что мы имеем дело с заданным химическим составом, таким, что при высокой температуре идут ядерные реакции с выделением энергии.

При таких оценках численные коэффициенты опускаются. Используя первое соотношение, получим для светимости

$$L \sim M^{1/3} T^{15/2} \rho^{-7/3},$$

а уравнение состояния идеального газа  $P = \mathfrak{R} \rho T$  дает

$$T \sim GM^{2/3} \rho^{1/3}.$$

Таким образом,

$$L \sim G^{15/2} M^{16/3} \rho^{1/6}.$$

Аналогично заменяем уравнение для энергии:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \rightarrow L = R^3 \rho \varepsilon = M \varepsilon.$$

Для энерговыделения имеем выражение (аппроксимирующие точные формулы 5.5):

$$\varepsilon = \rho T^{\nu},$$

где  $\nu = 4$  при  $T \sim 13 \cdot 10^6$  К (в случае pp-цикла) и  $\nu = 15 \div 20$  при  $T \sim 20 \cdot 10^6$  К (CNO-цикл). Дальше ограничимся случаем pp-цикла ( $\nu = 4$ ). Тогда

$$L \sim M \rho T^4 \sim G^4 M^{11/3} \rho^{7/3}.$$

Исключая плотность из двух выражений для  $L$  окончательно получим

$$L \sim G^{7,8} M^{5,5},$$

$$R \sim M^{0,07},$$

$$T_{\text{эф}} \sim M^{1,3}.$$

Отметим, что численные расчеты дают  $L \sim M^4$  (для звезд с массой порядка  $1 M_{\odot}$ ). Следует обратить внимание на сильную зависимость светимости от постоянной тяготения  $L \sim G^{7,8}$ . Из геологии известно, что светимость Солнца не менялась, по крайней мере на протяжении последних трех миллиардов лет. Это говорит о том, что постоянная тяготения не могла сильно меняться с возрастом Вселенной.

В случае томпсоновской непрозрачности (высокие температуры)

$$\kappa = \kappa_T,$$

$$L \sim RT^4 \rho^{-1} \kappa^{-1} \sim M^{1/3} T^4 \rho^{4/3} \sim M^{1/3} (T/\rho^{1/3})^4 \sim G^4 M^{11/3},$$

т. е. энергоотвод не зависит от  $\rho$ . Для энерговыделения при больших температурах имеем

$$L = M \rho T^{15} \quad (\text{CNO-цикл}),$$

что дает

$$\rho \sim M^{-4/3} G^{-11/6},$$

$$R \sim M^{7/9}.$$

Приведем таблицу 3, полученную путем численных расчетов для верхней части главной последовательности ( $M > M_{\odot}$ ,  $Z = 0,02$ ).

**Таблица.**

Модели звезд главной последовательности

$M/M_{\odot}$	2,5	5	10
$L/L_{\odot}$	20	300	3000
$R/R_{\odot}$	1,6	2,4	3,6
$\rho_c [\text{г см}^{-3}]$	48	20	8

### § 6.3. Тепловая устойчивость звезд

Раньше мы рассматривали вопросы механического равновесия звезд. Теперь нас будет интересовать их тепловая устойчивость, т. е. мы попытаемся понять, почему Солнце и другие звезды, обладая огромными запасами взрывоопасного вещества, весьма “разумно” расходует его на протяжении миллионов и даже миллиардов лет.

Тепловое равновесие вообще определяется равенством скоростей процессов энерговыделения и энергоотвода. Система устойчива в тепловом отношении в том случае, когда при небольшом возмущении температуры эти процессы меняются так, чтобы ликвидировать начальное возмущение.

Пусть в центре звезды “горит” водород и выделяющаяся энергия отводится теплопроводностью. Что произойдет при небольшом изменении температуры?

Из уравнения диффузии излучения получаем, что отвод тепла (светимость звезды) следующим образом зависит от физических величин:

$$L_{ff}^- \sim R \frac{T^{7,5}}{\rho^2}$$

при крамеровском законе непрозрачности и

$$L_c^- \sim R \frac{T^4}{\rho}$$

при комптоновском рассеянии. В эти формулы входит  $R$ , а не  $R^2$ , из-за градиента плотности лучистой энергии, входящего в уравнение диффузии:

$$\nabla T^4 = \frac{dT^4}{dr} \sim \frac{T^4}{R} \quad L \sim R^2 \nabla T^4 \sim RT^4.$$

Радиус  $R$ , средние значения температуры  $T$  и плотности  $\rho$  для звезды данной массы не являются независимыми:

$$M \sim R^3 \rho, \quad T \sim GM/R$$

(в дальнейшем  $G$  считаем постоянной и не вписываем в формулы). С учетом этих соотношений имеем следующие зависимости для отвода тепла:

$$L_{ff}^- \sim M^{a_1} \rho^{1/6} \sim M^{a_2} \sqrt{T},$$

$$L_c^- \sim M^{b_1} \rho_0 \sim M^{b_2} T^0$$

(в качестве упражнения найдите показатели  $a_i, b_i$ ). Таким образом, в случае крамеровской непрозрачности энергоотвод от температуры зависит слабо, а при комптоновском рассеянии не зависит от температуры вообще.

Как обстоит дело с подводом тепла  $L^+$ ? Из полученных в предыдущем параграфе соотношений имеем:

$$L_{pp}^+ \sim M \rho T^4 \sim M^c T^7 \quad (pp\text{-цикл}),$$

$$L_{\text{CNO}}^+ \sim M \rho T^{15} \sim M^d T^{18} \quad (\text{CNO-цикл})$$

(аналогично проделанному выше найдите показатели  $c$  и  $d$ ). В выражениях для теплоотвода  $\rho$  и  $T$  входят как в числитель, так и знаменатель, поэтому они почти (или совсем) сокращаются. В формулу для  $L^+$  и плотность и температура входят с одной стороны.

Почему в  $L^+$  плотность  $\rho$  входит в первой степени? Вероятность процесса на атом пропорциональна  $\rho$ , на единицу объема  $\sim \rho^2$ . Следовательно, по всей массе звезды  $L^+ \sim M\rho$ .

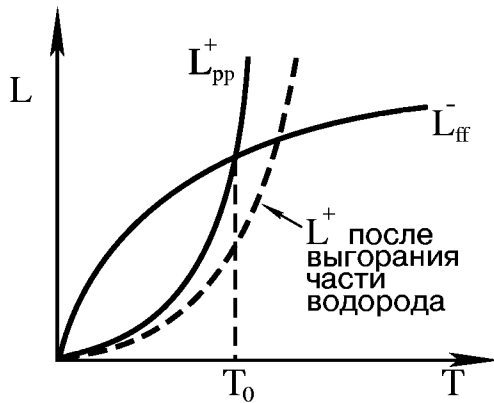


Рис. 32:

В CNO-цикле есть процессы типа  $^{12}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$ , вероятность которых не зависит от  $\rho$ , но они быстры (см. 5.5), а процессы типа столкновений (в которые  $\rho$  входит) медленны. Именно последние и лимитируют выделение энергии, т. е. они определяют скорость подвода тепла.

Итак, в равновесии  $L^+ = L^-$  при некотором фиксированном значении температуры (см. рис. 32).

Является это равновесие устойчивым? На первый взгляд кажется, что небольшое увеличение температуры приведет к возрастанию энерговыделения, что в свою очередь поднимает температуру дальше и ведет к взрыву звезды. При уменьшении температуры отвод энергии становится больше, чем ее выделение, и, казалось

было, это равновесие неустойчиво. Однако, как мы увидим в следующем параграфе, в звездах существует механизм саморегуляции, который делает это равновесие устойчивым.

бы, звезда должна остыть. Подобная ситуация возникает при неустойчивости горения обычных веществ на Земле.

Однако звезды устойчивы. Где ошибка в наших рассуждениях? Мы не учли факт, что звезда имеет отрицательную теплоемкость. В общем случае изменение температуры со временем определяется уравнением

$$c \frac{dT}{dt} = L^+ - L^- ,$$

где  $c$  — теплоемкость системы. При малых возмущениях относительно точки равновесия  $T_0$  разложим выражения  $L^+$  и  $L^-$  в ряд по степеням  $T - T_0$ , ограничиваясь линейными членами:

$$c \frac{d(T - T_0)}{dt} = L^+(T_0) + \frac{dL^+}{dT}(T - T_0) - L^-(T_0) - \frac{dL^-}{dT}(T - T_0),$$

откуда (поскольку  $L^+(T_0) = L^-(T_0)$ )

$$c \frac{d}{dt}(T - T_0) = \left( \frac{dL^+}{dT} - \frac{dL^-}{dT} \right) (T - T_0).$$

Ясно, что при  $dL^+/dT > dL^-/dT$  и  $c > 0$  малые возмущения приведут к неустойчивости:

$$T - T_0 = \text{const} \cdot \exp \left[ \left( \frac{dL^+}{dT} - \frac{dL^-}{dT} \right) t / c \right]. \quad (6.1)$$

Для звезды полная энергия  $\mathcal{E}$ , которая является суммой гравитационной энергии  $U$  и тепловой  $W = c_v M T$ , отрицательна:

$$U = -2W \quad (\text{теорема вириала; см. 1.8})$$

$$\mathcal{E} = U + W = -W < 0.$$

Таким образом, теплоемкость звезды  $c = d\mathcal{E}/dT = -c_v M < 0$ , т.е. формула (6.1) показывает, что возмущения затухают, поэтому звезда и находится в устойчивом тепловом равновесии.

Следует помнить, что эти рассуждения справедливы только в тех случаях, когда, во-первых, при малых возмущениях звезда расширяется (или сжимается) как целое и, во-вторых, тепловая энергия  $W$  пропорциональна температуре  $T$ , т. е. когда звезда невырождена. Когда эти условия не выполняются, то может возникнуть неустойчивость.

Рассмотрим теперь, как изменяется со временем положение теплового равновесия по мере выгорания водорода. Ясно, что с уменьшением общего количества водорода в центре кривая  $L^+$  будет со временем понижаться (см. рис. 32). Как видно, температура в центре постепенно растет, увеличивается центральная плотность звезды, растет светимость. Как показывают расчеты, радиус звезды изменяется в ту или другую сторону в зависимости от

наличия перемешивания. В отсутствие конвекции, когда звезда со временем становится химически неоднородной, размеры ее увеличиваются, т. е. звезда постепенно “разбухает”. Однако до тех пор, пока водород не выгорит в центре, все эти изменения столь медленны и незначительны, что в первом приближении можно считать звезду почти неизменной. Поскольку калорийность водорода велика, звезда долго находится в состоянии горения водорода в ее центральных частях. В этом состоянии проходит большая часть ее жизни, именно поэтому преобладающее большинство звезд сконцентрировано на главной последовательности диаграммы Гершпрунга–Рессела. Приведем время жизни в годах на главной последовательности для нескольких значений масс звезд:  $M = M_{\odot}$ ,  $T = 10^{10}$ ;  $M = 3M_{\odot}$ ,  $T = 2 \cdot 10^8$ ;  $M = 15M_{\odot}$ ,  $T = 10^7$ .

#### § 6.4. Эволюция звезд главной последовательности

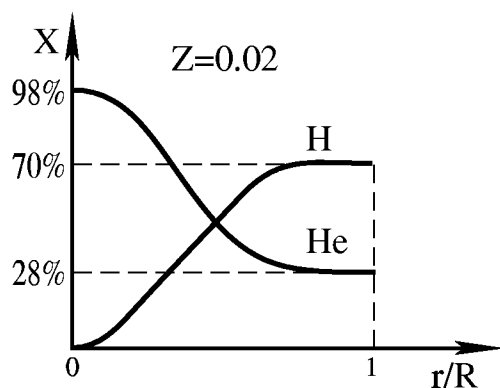


Рис. 33:

При достаточно больших массах ( $M > 0,5M_{\odot}$ ) нет глобального перемешивания, поэтому водород в центре постепенно истощается (рис. 33). Со временем в ядре водород исчезает полностью и звезда вступает в качественно новую фазу своей эволюции — появляется слоевой источник энергии. Поскольку в центральных областях энергия больше не выделяется, температура там выравнивается — звезда приобретает изотермическое гелиевое ядро (рис. 34). С появлением слоевого источника

звезда начинает быстро разбухать. Очень быстро происходит перестройка звезды, при которой ее радиус увеличивается в десятки раз. На расширение внешних частей звезды затрачивается энергия, что приводит даже к некоторому понижению ее светимости. На диаграмме Гершпрунга–Рессела звезда переходит в область красных гигантов.

Посмотрим на результаты численных расчетов для звезды  $5M_{\odot}$  (рис. 35). Практически невозможно качественно объяснить полный трек звезды на диаграмме Гершпрунга–Рессела. На стадии слоевого горения возникает конвекция, происходит сжатие гелиевого ядра и расширение оболочки. При сжатии ядра температура повышается до того момента, пока не станет возможным загорание гелия. У звезд определенной массы  $M < 2M_{\odot}$  конвекция не возникает, т. е. ядро долго остается изотермическим, и по мере горения водорода медленно нарастает его масса (причем температура и плотность почти не меняются). Однако это не может продолжаться слишком долго, так



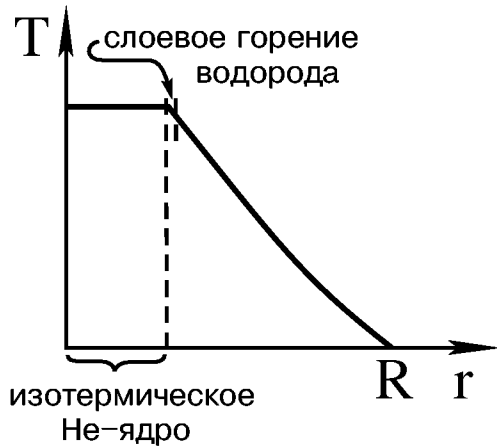


Рис. 34:

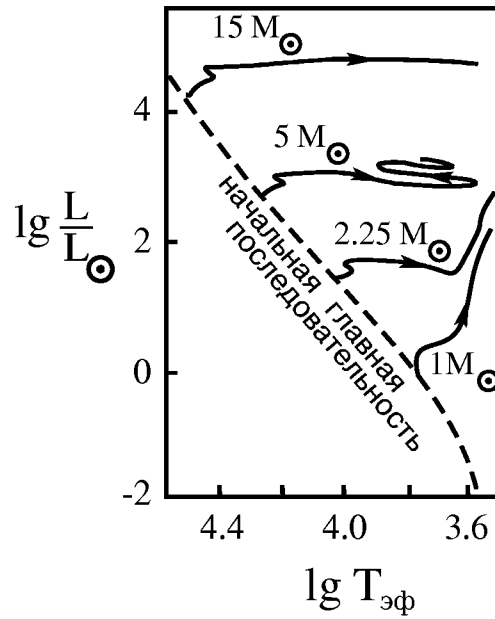
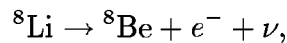


Рис. 35:

как при достижении определенной доли массы звезды ( $M_{\text{я}}/M \sim 10 - 15\%$ ) изотермическое ядро уже не может находиться в равновесии (так называемый предел Шенберга-Чандрасекара, не путать с Чандрасекаровским пределом белых карликов). После достижения этого предела ядро начинает сжиматься и разогреваться за счет выделения гравитационной энергии до тех пор, пока не загорится гелий.

### § 6.5. Горение гелия: $3\alpha$ -реакция

Горение гелия затруднено тем обстоятельством, что отсутствуют устойчивые ядра с атомным весом  $A = 5$  и  $A = 8$  (если бы они существовали, то были бы возможны реакции  ${}^4\text{He} + {}^1\text{H}$  и  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ ). Однако слияние трех ядер гелия дает устойчивое ядро с атомным весом 12:  $3{}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ . Поэтому дальнейшая эволюция звезды определяется этой так называемой  $3\alpha$ -реакцией. Ядра  ${}^8\text{Li}$  и  ${}^8\text{Be}$  неустойчивы и быстро распадаются. Например,



Тем не менее тот факт, что ядро  ${}^8\text{Be}$  хотя и неустойчиво, но все же существует в течение времени порядка  $10^{-16}\text{c}$ , оказывается существенным. Вероятность реакции при тройном столкновении  $\alpha$ -частиц с произвольными энергиями намного меньше вероятности того, что две  $\alpha$ -частицы имеют энергию как раз такую, что они (хотя и ненадолго) образуют систему  ${}^8\text{Be}$ . Такая система — ядро  ${}^8\text{Be}$  в подавляющем большинстве случаев распадается обратно

на две  $\alpha$ -частицы, но все же изредка происходит столкновение  ${}^8\text{Be}$  с третьей  $\alpha$ -частицей, приводящее к образованию  ${}^{12}\text{C}$ . При больших температурах в термодинамическом равновесии имеется некоторая концентрация ядер  ${}^8\text{Be}$ , определяемая формулой Саха:

$$[{}^8\text{Be}] \sim [{}^4\text{He}]^2 e^{-0,3\text{МэВ}/kT}.$$

Столкновение ядер  ${}^4\text{He}$  с  ${}^8\text{Be}$  приводит к образованию ядра  ${}^{12}\text{C}$ . Так как вероятность процесса пропорциональна произведению концентраций  ${}^4\text{He}$  и  ${}^8\text{Be}$

$$[{}^4\text{He}] [{}^8\text{Be}] \sim [{}^4\text{He}]^3 e^{-0,3\text{МэВ}/kT},$$

то скорость реакции  $\sim \rho^3$ , если рассчитывать ее на единицу объема, или  $\rho^2$  — на единицу массы. Однако ни столкновение  $3\alpha$ , ни столкновение  ${}^8\text{Be}$  с  $\alpha$  само по себе не приводит к образованию стабильного ядра  ${}^{12}\text{C}$ , пока система не избавится от лишней энергии. Избыток энергии трех покоящихся  $\alpha$ -частиц над энергией  ${}^{12}\text{C}$  равен 7,28 МэВ, для горячих  $\alpha$ -частиц он еще больше. При этом энергию не может унести нейтрон или протон — на это энергии не хватает, да и получился бы  ${}^{11}\text{B}$  или  ${}^{11}\text{C}$ , а не  ${}^{12}\text{C}$ . Значит энергию уносят фотоны или пары  $e^+, e^-$  (см. ниже). Снова вероятность процесса увеличивается, если система долго живет в данном состоянии, т. е. если мы имеем дело с определенным возбужденным состоянием ядра  ${}^{12}\text{C}$ , а не системой, состоящей из 6 протонов и 6 нейтронов (или 3  $\alpha$ -частиц) с произвольной энергией, не равной энергии какого-либо возбужденного состояния  ${}^{12}\text{C}$ .

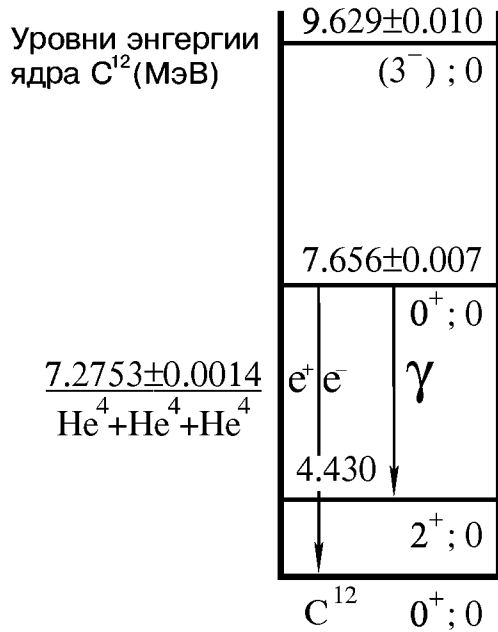


Рис. 36:

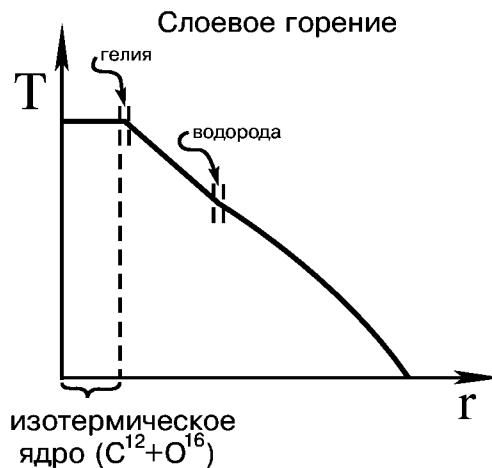
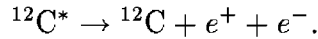
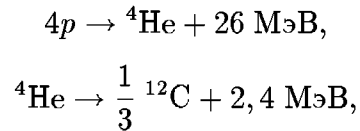


Рис. 37:

Ядро  $^{12}\text{C}$  обладает большим количеством уровней (рис. 36). Один из уровней с энергией  $E = 7,66$  МэВ находится в резонансе с тремя ядрами гелия —  $3\ ^4\text{He}$ , обладающими избытком кинетической энергии ( $7,66 - 6,28 = 0,38$ ) МэВ. Это возбужденное состояние, так же как и основное, имеет спин  $s = 0$ . Поэтому переход с уровня 7,66 МэВ в основное состояние  $^{12}\text{C}$  не может идти с испусканием одного  $\gamma$ -кванта (спин которого равен 1). Наиболее вероятным является переход с испусканием электронно-позитронной пары



Снятие возбуждения может происходить также с испусканием квантов через промежуточный уровень  $E = 4,43$  МэВ. Полная вероятность реакции на единицу массы пропорциональна  $\rho^2 e^{-\Delta E/kT} \simeq \rho^2 e^{-4,4/T_9}$ . Сравним калорийность  $3\alpha$ -реакции с  $pp$ -циклом:



т.е. выделение энергии на грамм в  $3\alpha$ -реакции на порядок меньше.

Постепенно гелий в центре тоже выгорает — возникает гелиевый слоевой источник, а водород при этом продолжает гореть во внешнем слоевом источнике (рис. 37). На стадии гелиевого слоевого источника сильно возрастает светимость звезды, увеличивается ее радиус, и на диаграмме ГР звезда попадает в область красных сверхгигантов (рис. 35). В дальнейшем (в достаточно массивных звездах) загорается углерод. Должно идти образование более тяжелых элементов O, Mg, Ne и т. д. во все уюыстриющемся темпе. И наконец, такая звезда должна достичь состояния, при котором теряется ее устойчивость. Однако пока не существует хороших расчетов, доведенных до конца. Положение дел усложняется наличием большого числа слоевых источников и ядерных реакций, скорости которых плохо изучены. Кроме того, возникают тепловые неустойчивости, вспышки и т.п. Все это затрудняет проведение детальных расчетов.

Ниже мы обсудим ряд характерных моментов, которые возникают при расчетах эволюции звезд и имеют достаточно простое физическое истолкование.

## § 6.6. Определение возраста скоплений

Остановимся вкратце на одном из результатов теории внутреннего строения звезд, ставшим классическим — определение возраста шаровых скоплений. Диаграмма ГР шаровых скоплений имеет характерный вид (рис. 38). От главной последовательности в так называемой “точке поворота” отходит ветвь красных гигантов. Можно предположить, что все звезды шарового скопления образовались одновременно. Тогда наблюдаемую диаграмму

ГР получают следующим способом. Возьмем набор звезд разных масс и построим для них эволюционные кривые (рис. 39). Звезды большой массы (т. е. большой светимости) эволюционируют быстрее и становятся красными гигантами, пока звезды малой массы еще остаются на главной последовательности. Соединив точки равного возраста (жирная кривая на рис. 39), получим наблюдаемую диаграмму ГР. Этот метод позволяет определить не только возраст скоплений, но и начальный химический состав их звезд, так как от него зависит вид получаемой диаграммы ГР. Получение начального содержания гелия очень важно для космологии. Во фридмановской космологии в теории горячей Вселенной должно быть около 25–30% He.

Сходным образом определяют и возраст рассеянных скоплений. Существенная разница — это практически полное отсутствие ветви гигантов в молодых рассеянных скоплениях. Объясняется это просто — в стадии красного гиганта звезда живет очень недолго в рассеянных скоплениях общее число звезд в сотни раз меньше, чем в шаровых, а “предгиганты” в них массивнее (так как рассеянные скопления гораздо моложе) и эволюционируют быстрее. По этим причинам вероятность застать звезду в стадии гиганта очень мала. Но “точка поворота” и здесь видна — это то место, где главная последовательность резко обрывается.

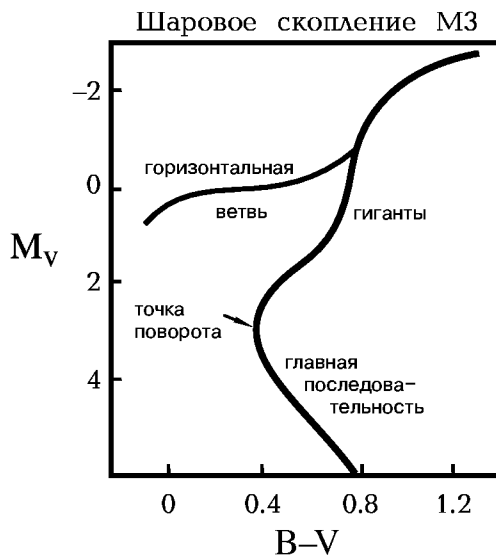


Рис. 38:

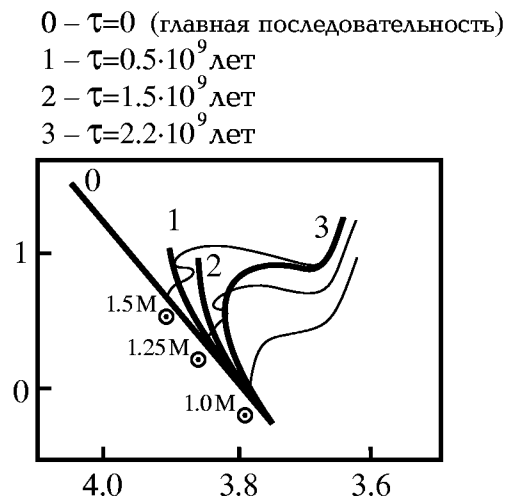


Рис. 39:

Интересно заметить, что в рассеянных скоплениях видны белые карлики. Их массы заведомо меньше чандрасекаровского предела ( $1,4 M_{\odot}$ ). Наблюдаются белые карлики около  $0,7 M_{\odot}$ , хотя звезды более массивные сидят еще на главной последовательности. Например, в Гиадах есть больше десятка белых карликов, а точка поворота  $\sim 2 M_{\odot}$ . В Плеядах найден один белый карлик, хотя на главной последовательности еще есть звезды с массой 4–6  $M_{\odot}$ ! Эти

факты говорят об интенсивной потере массы звездами после главной последовательности и перед концом жизни.

### § 6.7. Качественная картина эволюции звезды

Эволюция звезд с массой больше и меньше  $2,5 M_{\odot}$  идет по-разному. При  $M > 2,5 M_{\odot}$  в изотермическом гелиевом ядре растет температура и в дальнейшем возможно зажигание и спокойное горение гелия. Для звезд с меньшей массой в изотермическом ядре наступает вырождение, при котором сила тяжести уравнивается давлением вырожденных электронов. Если в таком ядре начнутся ядерные реакции, то при его достаточно большой массе может произойти термоядерный взрыв, так как повышение температуры почти не будет сопровождаться одновременным повышением давления. При массах  $4 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$  наступает вырождение углерода в центре. Возможны условия, когда углеродное ядро звезды сгорает почти мгновенно и может быть достигнута светимость  $\sim 10^{10} L_{\odot}$ . Такой взрыв может быть отождествлен со вспышкой сверхновой.

В этом разделе мы хотим на простых формулах (хотя и приближенных) показать, как в результате эволюции, из-за вырождения в центре, теплоемкость звезды может стать положительной, и возникает тепловая неустойчивость.

Вся суть в том, что мы рассматриваем эволюцию звезды с данной массой, причем  $P$  и  $\rho$  связаны между собой условиями гидростатического равновесия. Эволюция постепенно меняет связь между  $P$  и  $\rho$ . При этом нельзя забывать, что звезда является протяженной, неоднородной системой, поэтому необходимо говорить либо о средних значениях  $\langle P \rangle$  и  $\langle \rho \rangle$ , либо о значениях в центре  $P_c$  и  $\rho_c$ . Ниже для определенности будем рассматривать  $P_c$  и  $\rho_c$ .

Структуру звезды можно приближенно описать политропой. Пусть индекс политропы  $n = 3$ . Тогда

$$P(r) = P_c (\rho/\rho_c)^{4/3},$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{54} \rho_c, \quad P_c = \underbrace{P_1 GM^{2/3}}_a \rho_c^{4/3}.$$

Ниже индекс  $c$  будем опускать. Итак,

$$P = a \rho^{4/3}$$

где  $a \sim M^{2/3}$ .

Рассмотрим сначала предельный случай вырожденного электронного газа с  $T = 0$ . Тогда давление связано с плотностью по формуле

$$P = \text{const} \cdot \rho \left[ \underbrace{((m_e c^2)^2 + p_F^2 c^2)^{1/2}}_{E_F} - m_e c^2 \right],$$

где  $p_F = m_e c x$ ,  $x = (\rho/\mu_e \cdot 10^6)^{1/3}$ . (Эта формула не точная! Но она правильно передает асимптотики уравнения состояния вырожденного газа.) Видим, что при  $x = 1$ ,  $p_F = m_e c$ , следовательно,  $x = 1$  отмечает границу релятивизма (см. 2.4). Итак,

$$P \sim \rho \left[ ((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3})^{1/2} - m_e c^2 \right].$$

Учтем теперь вклад давления теплового движения частиц, вводя функцию  $f(T)$ , такую что

$$P \sim \rho \left[ ((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3} + f(T))^{1/2} - m_e c^2 \right] = a\rho^{4/3}. \quad (6.2)$$

Здесь  $f(T)$  — растущая функция температуры, причем в не релятивистской области  $f \sim T$ , а в ультрарелятивистской  $\sim T^2$ . Перепишем соотношение (2) в виде

$$((m_e c^2)^2 + b\rho^{2/3} + f(T))^{1/2} = y\rho^{1/3} + m_e c^2,$$

где  $y \sim a$  — некоторая новая константа, и возведем последнее соотношение в квадрат. Тогда  $(m_e c^2)^2$  сократится, и мы получим

$$f(T) = 2y\rho^{1/3}m_e c^2 + (y^2 - b)\rho^{2/3}.$$

При  $\rho \rightarrow 0$  (нерелятивистская область)  $f(T) \sim T$  и отсюда

$$T \sim \rho^{1/3} M^{2/3},$$

поскольку  $y \sim a \sim M^{2/3}$ . Итак, мы получили один из вариантов теоремы вириала.

При больших плотностях поведение температуры зависит от того, положительна или  $\rho^{2/3}$ . Если  $y^2 < b$  (т. е. масса мала,  $y \sim M^{2/3}$  и скобка отрицательна), то легко увидеть, что существует равновесие при  $T = 0$ ,  $\rho \neq 0$ , и кроме этого есть максимум температуры (рис. 40). Легко найти соотношение между максимальной плотностью ( $T = 0$ ) и полтностью, соответствующей максимуму температуры:  $\rho_{T \max} \simeq \frac{1}{8}\rho|_{T=0}$  (так как  $\rho_{T \max}^{1/3} = \frac{1}{2}\rho^{1/3}|_{T=0}$ ). Таким образом, мы видим, что при постепенном сжатии температура растет, достигает максимума, а затем убывает. Найдем асимптотику  $T_{\max}$  для малых масс. Имеем

$$\rho|_{T=0} \sim (y/b)^3 \sim M^2,$$

отсюда

$$T_{\max} \sim \rho^{1/3} \sim M^{2/3}.$$

Конкретные расчеты показывают, что для масс, меньших чем  $0,08 \div 0,10 M_\odot$ , максимально возможная температура ниже значения, при котором начинает гореть водород. Этот предел слабо зависит от химического состава звезды, так как он получается из общих термодинамических соотношений. Можно

также найти, что для масс  $M < 0,35 M_{\odot}$  не загорается гелий, т. е. не идет  $3\alpha$ -реакция  $3\ ^4\text{He} \rightleftharpoons \text{C}$ , а при  $M < 0,8 M_{\odot}$  не горит углерод (в реакции  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightleftharpoons ^{24}\text{Mg}$ ). Наличие максимума температуры важно и в другом отношении. Именно благодаря замедлению роста температуры в маломассивных звездах с ростом центральной плотности звезда попадает в область вырождения (см. рис. 40). Если это происходит при достаточно высокой температуре, то взрыв неизбежен.

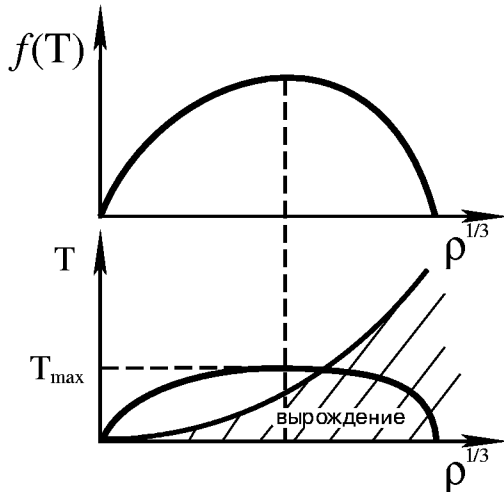


Рис. 40:

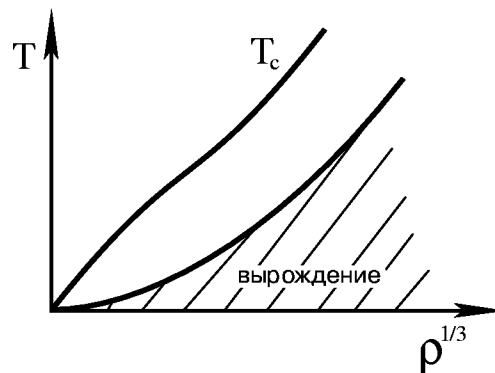
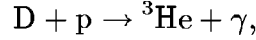


Рис. 41:

При  $y^2 < b$  ( $M < M_{Ch} = 1,4 M_{\odot}$ ) образуются белые карлики. Массы наблюдаемых белых карликов  $\sim 0,6 M_{\odot}$ . Но звезда с массой  $\sim 0,6 M_{\odot}$  живет на главной последовательности около  $3 \cdot 10^{10}$  лет, т.е. больше возраста Вселенной. Это еще один аргумент в пользу того, что наблюдаемые сейчас белые карлики произошли из более массивных звезд, которые в процессе эволюции потеряли значительную часть своей массы. Кроме того, имеются двойные звездные системы, состоящие из белого карлика с массой порядка  $0,6 M_{\odot}$ , и звезды главной последовательности с массой порядка  $2 M_{\odot}$ . Такое сочетание объектов возможно только лишь в том случае, если на месте белого карлика ранее была более массивная звезда, потерявшая на стадии красного гиганта большую часть своей массы. Почти вся утерянная масса может быть захвачена вторым компонентом.

Теперь рассмотрим случай больших масс ( $y^2 > b$ ,  $M > 1,4 M_{\odot}$  — чандрасекаровский предел). Для этих масс в рамках наших приближенных расчетов нет ограничений на рост плотности и температуры (рис. 41). Загорание тяжелых элементов (C, O, Mg) начинается в вырожденных условиях. Но следует помнить, что мы предполагали постоянство числа электронов, неизменность химического состава, не учли эффекты ОТО. На самом деле из-за этих эффектов при достижении некоторой критической плотности начнутся катастрофические события.

Задача. Расчет космологических моделей дает содержание дейтерия относительно водорода  $10^{-3}$ – $10^{-4}$ . Найти значение массы звезды, при которой пойдет реакция



(т. е. нужно проверить не только, сможет ли начаться реакция, но и успеет ли она пройти по сравнению со временем остывания, задержит ли она остывание).

## Глава 7. НОВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ. МЕХАНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

### § 7.1. Общая теория относительности — ОТО

Везде выше мы пользовались ньютоновской теорией тяготения, условие применимости которой  $|\varphi| \ll c^2$ . Введем пока формально понятие гравитационного радиуса  $r_g$  — величины, при которой параболическая скорость убегания с поверхности становится равной  $c$  в рамках ньютоновской теории:

$$\frac{GM}{r_g} = \frac{c^2}{2} \text{ откуда } r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Численно  $r_g = 3 \cdot 10^5 (M/M_\odot)$ .

Качественно эффекты ОТО можно учесть следующим образом: там, где в ньютоновской теории сила тяжести пропорциональна  $GM/R^2$ , в ОТО эта сила  $\sim GM/(R(R - r_g))$ , т.е. сила тяготения обращается в бесконечность на  $r_g$ . Найдем теперь величину средней плотности, при которой эффекты ОТО становятся важными:

$$\bar{\rho}_{\text{cr}} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} < \frac{M}{\frac{4\pi}{3}r_g^3} = 2 \cdot 10^{16} \left( \frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ г/см}^3.$$

Отсюда вывод: чем больше масса, тем при меньшей плотности достигаются релятивистские эффекты. Например, для квазаров  $M \sim 10^8 M_\odot$  они становятся важны при  $\bar{\rho}_{\text{cr}} \sim 1 \text{ г/см}^3$ , т.е. вещество локально находится в обычном состоянии, а релятивистские эффекты появляются просто из-за того, что его много. Для обычных звезд  $\bar{\rho}_{\text{cr}} \sim 10^{16} \text{ г/см}^3$ , и здесь сначала будут проявлять себя специфические эффекты вещества (нейтронизация, диссоциация ядер и пр.).

### § 7.2. Нейтронизация

Возьмем область, где  $kT < m_e c^2$  и  $\rho \gg 10^6 \mu_e$ , т.е. температура низка, а плотность велика. При этом тепловые движения нерелятивистские, а принцип Паули из-за высокой плотности заставляет электроны двигаться с релятивистскими скоростями. С точки зрения излучения это вещество холодное,