

Возможно также рождение пар $\nu, \bar{\nu}$ при столкновении адронов или возбужденными состояниями ядер $A^* \rightarrow A + Z^0 \rightarrow A + \nu + \bar{\nu}$ (ν_e, ν_μ, ν_τ — с одинаковой вероятностью). С другой стороны, появляется новый канал рассеяния нейтрино на электронах и, главное, новый процесс рассеяния нейтрино на ядрах. В этом процессе рассеяние на всех нуклонах может происходить когерентно, при этом амплитуда рассеянной волны пропорциональна числу нуклонов, а сечение рассеяния оказывается пропорционально квадрату числа нуклонов. Таким образом увеличивается непрозрачность плотного вещества, состоящего из тяжелых и средних ядер по отношению к нейтрино всех сортов. Этот факт играет большую роль в теории взрыва сверхновых звезд.

Какова роль нейтринных процессов в эволюции звезд вообще? На стадии главной последовательности нейтринное излучение, казалось бы, мало существенно. Однако нельзя забывать, что, во-первых, без слабого взаимодействия, а значит и без излучения нейтрино, вообще не возможно горение водорода. А, во-вторых, нейтрино позволяет в принципе заглянуть в самые центральные области звезд и проверить наши теории. Для Солнца это уже делается (опыты Дэвиса).

На поздних стадиях эволюции нейтринное излучение может играть решающую роль, поскольку достигаются высокие температуры, и нейтрино эффективно отводит тепло. Без нейтрино трудно объяснить образование планетарных туманностей, взрывы сверхновых. Нейтринное излучение сильно ускоряет остывание горячих белых карликов и нейтронных звезд. Поэтому, сравнивая предсказания теории эволюции звезд, рассчитанные с учетом и без учета нейтрино, с наблюдениями реальных объектов, можно проверить теорию слабых взаимодействий, т.е. установить наличие в природе тех процессов, которые в лаборатории пока не наблюдались.

Глава 8. ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

После открытия квазаров, пульсаров и компактных рентгеновских источников нельзя изучать эволюцию звезд, не ознакомившись с теорией сильного гравитационного поля. С созданием специальной теории относительности стало ясно, что теория тяготения Ньютона с мгновенным дальновидением нуждается в перестройке и что необходима новая релятивистская теория тяготения, притом такая, которая содержала бы теорию Ньютона как предельный случай. Возникло много попыток построить такую теорию; эти попытки продолжаются до сегодняшнего времени. Однако наиболее привлекательной остается теория тяготения А.Эйнштейна — общая теория относительности (кратко ОТО) — она прекрасно удовлетворяет всем экспериментальным данным и, кроме того, в сущности является самой простой. В нашем

курсе мы познакомимся с физикой общей теории относительности. Однако, для того чтобы в полной мере овладеть материалом последующих лекций, необходимо проработать полный курс теории Эйнштейна — лучше всего “Теорию поля” — Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица.

§ 8.1. Идея искривленного пространства–времени

Все тела независимо от их массы падают с одинаковым ускорением — это было известно со времен Галилея. Но именно этот факт стал определяющим для Эйнштейна при создании общей теории относительности (ОТО). Закон тяготения Ньютона очень похож на закон Кулона. Однако в закон Ньютона в качестве гравитационного заряда входит величина, пропорциональная инертной массе. Почему же тяготения связано с инертной массой? С точки зрения ньютоновской теории это некоторая случайность. Однако именно от этого оттолкнулся Эйнштейн, когда ему пришла в голову идея искривленного пространства.

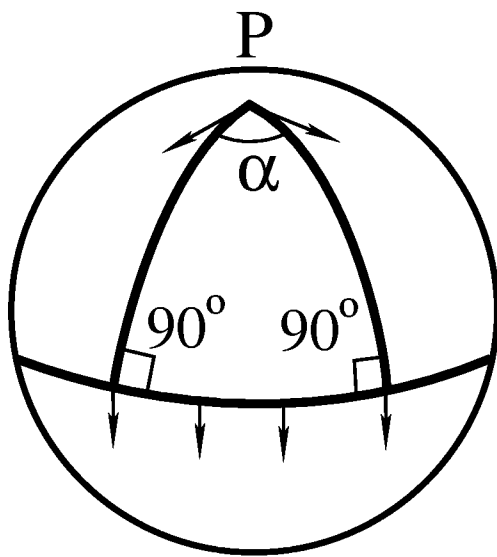


Рис. 51:

естественно объясняется независимость ускорения свободного падения от природы тела.

Что такое искривленное пространство? Проще всего это понять на примере двумерного случая. Рассмотрим поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. “Прямыми” на этой поверхности будут дуги большого круга, так как им соответствуют кратчайшие расстояния на поверхности. Сумма углов треугольника уже не равна π . Рассмотрим треугольник с вершиной в полюсе и двумя вершинами на экваторе (рис. 51). Сумма углов в этом треугольнике

В плоском четырехмерном пространстве (x, y, z, t) движению по прямой соответствует равномерное прямолинейное движение. В плоском пространстве прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками, т. е. экстремаль. Идея Эйнштейна заключается в том, что и в поле тяготения все тела движутся по экстремальным (геодезическим) линиям в пространстве-времени, которое, однако, уже не плоское, а искривленное. Пространство-время искривляют массы, создающие поле тяжести. Если пространство искривлено, и все тела движутся по геодезическим, то это означает, что тела разной природы будут двигаться по одинаковым траекториям, т. е. есте-

равна $\pi + \alpha$. Площадь треугольника равна αR^2 .

В двумерном случае можно представить кривое пространство вложенным в трехмерное пространство. Однако пространство данной размерности можно изучать и непосредственно, по внутренним свойствам, не обращаясь к идее вложения. Например, точки поверхности шара можно характеризовать двумя независимыми координатами θ и φ (широтой и долготой). Можно найти выражение для элемента длины на поверхности шара

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \varphi^2).$$

Далее мы задаемся условием, что φ и $(2\pi - \varphi)$ при данном θ описывают одну и ту же точку, а θ меняется от 0 до π . (Здесь мы не вдаемся в вопрос о том, как связаны эти по существу топологические условия с видом выражения для ds^2). Все свойства сферы этим заданы.

Для элемента длины в плоском двумерном пространстве можно записать

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2(d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2)$$

(R — масштабный фактор). Здесь координата θ может меняться от 0 до ∞ в отличие от сферы, где θ меняется от 0 до π (так как $\sin \theta = 0$ при $\theta = \pi$).

Итак, отличие кривой поверхности от плоской можно обнаружить, исследуя геометрию самой двумерной поверхности, без вложения.

Обратимся к трехмерному случаю.

В плоском пространстве квадрат элемента длины ds между двумя бесконечно близкими точками записывается в виде (dx, dy, dz — соответствующие разности координат)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Введем новые координаты, ξ, η, ζ следующим образом:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta),$$

$$y = y(\xi, \eta, \zeta),$$

$$z = z(\xi, \eta, \zeta).$$

Тогда

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Квадрат элемента длины в новых координатах записывается в виде

$$ds^2 = g_{11}d\xi^2 + g_{12}d\xi d\eta + \dots ,$$

где

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 ,$$

$$g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) ,$$

и т.д.

Пока мы только лишь в новом виде описали плоское пространство. Имеем 9 величин g_{ik} , из которых только 6 независимы, так как $g_{ik} = g_{ki}$. Можно показать, что в плоском пространстве сами величины g_{ik} , их первые и вторые производные определенным образом связаны. Уместен вопрос, что будет, если выбрать g_{ik} , чтобы эти связи не выполнялись? Тогда окажется, что такая метрика описывает искривленное пространство, которое уже трудно представить наглядно. При этом g_{ik} определяют как координатную сетку, так и кривизну пространства.

Здесь уместно сделать историческое замечание: Лобачевский и Больяи рассматривали пространство, кривизна которого везде постоянна. Не выражая этой мысли в явном виде, они исходили из идеи, что существуют абсолютно жесткие тела. Такое тело может перемещаться в пространстве постоянной кривизны.

Характеризуя пространство метрическими коэффициентами g_{ik} , являющимися произвольными функциями координат, Риман ввел в рассмотрение пространство, кривизна которого меняется от точки к точке. В этот же период возникают первые идеи о том, что кривизна пространства может быть связана с физическими факторами. Отказ от идеи абсолютно жесткого тела стал вполне естественным позже, с развитием электронной теории и открытием лоренцева сокращения тел.

В искривленном пространстве можно определять кривую, дающую минимум расстояния между двумя точками:

$$l_{12} = \int_{\xi_1 \eta_1 \zeta_1}^{\xi_2 \eta_2 \zeta_2} ds = \min (\text{по всем путям из 1 в 2}).$$

В плоском случае сразу получается

$$x = a_1 + b_1 t,$$

$$y = a_2 + b_2 t,$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

т. е. параметрическое выражение прямой.

В общем случае искривленного пространства такой простой зависимости не будет; можно написать только дифференциальные уравнения — уравнения геодезической.

Наконец, следующий шаг заключается в том, что рассматривается как исходное, четырехмерное пространство Минковского, или, другими словами, комплекс, состоящий из времени и трехмерного пространства (в узком смысле слова).

Это четырехмерное многообразие преобразуется по Лоренцу, а не по Галилею, т. е. так, что остается инвариантным

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

или в малом

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При переходе от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой со скоростью v , меняется также время $t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, где $\beta = v/c$.

Такую метрику — не евклидову, а псевдоевклидову (вследствие разного знака у dt и dx, dy, dz) надо сделать “кривой”, вводя g_{ik} функции координат и времени.

§ 8.2. Параллельный перенос векторов

Что такое параллельный перенос в евклидовом пространстве, всем понятно: при переносе должны оставаться постоянными компоненты вектора в декартовых координатах. Однако уже в плоском пространстве, но в криволинейных координатах, например, в полярных, это не так просто определить.

При параллельном переносе в плоском пространстве сохраняется направление вектора. В частности, сохраняются углы, образуемые вектором с прямой (т. е. геодезической), соединяющей исходную и конечную точки переноса. При обходе замкнутого контура положение вектора совпадает с исходным. В искривленном пространстве это не так. Легче всего это понять на примере сферы⁹ (см. рис. 51). Выйдем из полюса с вектором, направленным по меридиану. Дойдем до экватора и перенесем вектор параллельно самому себе вдоль экватора, после чего вернемся по другому меридиану на полюс. Очевидно, что конечное положение вектора не совпадает с исходным и угол поворота α равен как раз избытку углов треугольника над 180° . При малых α

$$|\Delta \vec{A}| = |\vec{A}| \alpha = |\vec{A}| S / R^2,$$

⁹В общем случае кривого пространства не так просто освоить понятие параллельного переноса. Дирак пользуется для этого представлением кривого пространства как гиперповерхности в плоском пространстве большого числа измерений. После очевидной операции переноса на малое расстояние ds производится проектирование вектора на гиперповерхность, и так малыми шагами производится параллельный перенос на конечные расстояния.

где S — площадь треугольника.

Приращение вектора $\Delta \vec{A} \perp \vec{A}$, так как длина вектора не меняется.

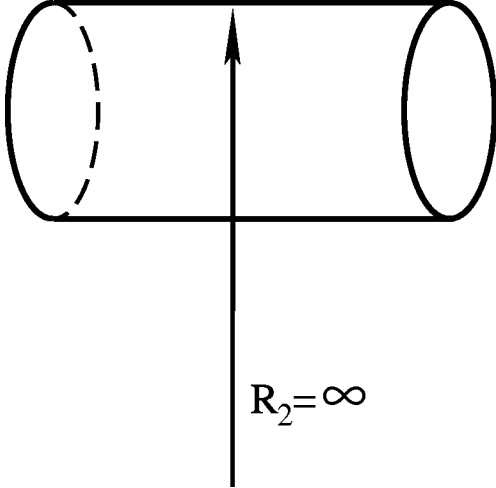


Рис. 52:

Кривизна двумерной поверхности характеризуется только одним числом (например, радиусом кривизны R). Надо понимать, что эта кривизна не обусловлена рассмотрением ее из трехмерного мира. Это число характеризует внутреннюю геометрию двумерной поверхности.

Например, поверхность цилиндра с точки зрения трехмерного наблюдателя искривлена. Ее внешняя геометрия характеризуется двумя радиусами кривизны: одним конечным R_1 и другим R_∞ (рис. 52). Но с точки зрения двумерного существа все геометрические фигуры на этой

поверхности имеют те же свойства, что и фигуры на плоском листе (сумма углов треугольника равна π и т. п.). Таким образом, цилиндр является примером плоской поверхности (от обычной плоскости он отличается только топологией).

Другой пример — конус. Коническая поверхность везде плоская, кроме одной точки, но в этой точке кривизна ведет себя подобно δ -функции. Поэтому там, где входят интегралы от кривизны, мы получаем конечный вклад от этой одной точки.

Приращение компонент вектора $\vec{A} = (A_1, A_2)$ при параллельном переносе по бесконечно малому контуру площади Δf на поверхности в некоторой системе координат x_1, x_2 можно записать в виде:

$$\Delta A_1 = \kappa A_2 \Delta f,$$

$$\Delta A_2 = -\kappa A_1 \Delta f,$$

т. е. матрица этого преобразования имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$. Здесь κ — внутренняя кривизна поверхности (на сфере $\kappa = 1/R$). Такой вид матрицы преобразования связан с условием сохранения длины вектора.

В трехмерном (и более общем) случае изменение компонент вектора при параллельном переносе зависит также от ориентации элементарных площадок, определяемых контуром пути переноса. Поэтому изменение компонент вектора при параллельном переносе по контуру, ограничивающему малую

двумерную поверхность Δf^{lm} , описывается формулой

$$\Delta A^i = \frac{1}{2} R_{klm}^i A^k \Delta f^{lm},$$

где R_{klm}^i — так называемый тензор кривизны. Как это принято, здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. В силу свойств симметрии в четырехмерном случае R_{klm}^i имеет 20 независимых компонент.

Тензор R_{klm}^i выражается через метрику g_{ik} , точнее говоря через g_{ik} , $\partial g_{ik}/\partial x^l$ и $\partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$.

Поэтому, если известна метрика g_{ik} , то известна и кривизна в каждой точке. И наоборот, если известен тензор кривизны R_{klm}^i , то геометрия пространства полностью известна. Заметим, что если $R_{klm}^i = 0$, то пространство плоское, и существует такое преобразование координат, которое преобразует выражение $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ к псевдоевклидову виду: $ds^2 = \delta^{ik} dx^i dx^k$.

§ 8.3. Физика искривленного пространства–времени

В отсутствие гравитационного поля физика разворачивается в псевдоевклидовом пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При наличии гравитации, т. е. в ОТО, будем считать, что пространство искривлено:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad g_{ik} = g_{ki} \quad (8.1)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Если задан метрический тензор g_{ik} (для краткости будем говорить “метрика” g_{ik}), то можно найти геодезические в пространстве–времени, т. е. определить движение частиц в гравитационном поле.

В данной точке квадратичную форму (1) можно диагонализировать и привести ее к метрике Минковского¹⁰.

В общем случае можно разложить g_{ik} в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

$$g_{ik}(x) = g_{ik}(x_0) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Преобразованием системы координат в данной точке всегда можно обратиться в нуль первые производные g_{ik} . Для этого достаточно перейти в свободно падающую систему отсчета. Но произвольную совокупность всех вторых производных g_{ik} никакими преобразованиями системы координат уничтожить нельзя.

¹⁰Это условие накладывает определенные ограничения на те g_{ik} , которые реализуются в природе. Например, невозможно, чтобы где-то было $ds^2 = -c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Если рассматривать квадратичные эффекты, например, относительные ускорения удаленных частиц, то можно заметить приливные силы. Невесомость существует лишь если ограничиться первым порядком по Δx . Таким образом, одна частица “не чувствует” гравитационного поля, но система с разнесенными массами “чувствует”. Глобально гравитационное поле всегда можно обнаружить.

Таким образом, в членах первого порядка по Δx эффект гравитации компенсируется ускорением свободного падения — в этом и состоит точная формулировка принципа эквивалентности. (Более грубая формулировка: “Силы инерции эквивалентны некоторому полю тяготения”.)

Итак, кривизна пространства характеризуется двадцатью независимыми числами R_{iklm}^i . Естественно связать R_{iklm}^i с веществом.

В ньютоновской теории потенциал гравитационного поля определяется плотностью вещества ρ [г/см³]. Можно перевести плотность вещества ρ в плотность энергии $\varepsilon = \rho c^2$. В специальной теории относительности ε является 00-компонентой тензора энергии-импульса

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ j_2 & \cdot & T_{\alpha\beta} & \\ j_3 & \cdot & & \end{pmatrix}.$$

Тензор T_{ik} состоит из величин, которые по отношению к трехмерным, чисто пространственным поворотам ведут себя как скаляр ε , вектор \vec{j} (поток энергии-импульса на единицу объема) и трехмерный тензор натяжений $T_{\alpha\beta}$, диагональные члены которого характеризуют давление, а недиагональные — вязкость.

Мы видим, что вещество характеризуется тензором второго ранга.

Эйнштейн получил уравнения поля в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{c^2}\kappa T_{ik}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^2},$$

где $R_{ik} = g^{lm}R_{limk}$, $R = g^{ik}R_{ik}$. Из этих уравнений следует (в случае слабых полей) закон тяготения Ньютона и, кроме того, автоматически выполняются законы сохранения¹¹.

В электромагнитной теории заряд сохраняется, но движение заряда произвольно. В ОТО T_{ik} не может быть любым — движение должно соответствовать законам механики, т.е. законам сохранения энергии и импульса. Нет метрики, где вещество сначала покоилось, а потом все в целом самопроизвольно начало бы двигаться. Кроме того, оказалось, что из уравнений

¹¹Знаменитый математик Гильберт получил правильный вид уравнений практически одновременно с Эйнштейном. Статья Гильберта датирована неделей раньше, но в этой статье есть примечание Гильберта, что правильный вид уравнений поля он узнал от Эйнштейна. При этом Гильберт вывел уравнения из вариационного принципа.

ОТО получают не только законы движения материальных точек (т. е. законы механики), но и (с небольшим произволом) законы свободного электромагнитного поля (уравнения Максвелла). Это породило в свое время массу надежд. Казалось, что всю физику можно вывести из ОТО. Однако попытки создать единую теорию поля к успеху не привели.

Число уравнений Эйнштейна равно числу компонент тензора второго ранга, а полное описание пространства задается тензором четвертого ранга R_{klm}^i . В двумерном и трехмерном пространстве-времени задание R_{ik} однозначно определяет R_{klm}^i , в четырехмерном мире это не так: условие $R_{ik} = 0$ совместимо с $R_{klm}^i \neq 0$. Это означает, что гравитационное поле может существовать и без источников — это, например, гравитационные волны.

Еще английский математик Клиффорд высказал идею, что у пространства должна быть собственная упругость. В некотором смысле ОТО является развитием этой идеи. В лагранжиан L входит кривизна $R = g^{ik} R_{ik}$:

$$L = \frac{c^3}{16\pi G} \int R dV,$$

где V — четырехмерный объем. (Если задаться таким лагранжианом и лагранжианом других полей и частиц, то при варьировании метрики можно получить уравнения ОТО, что и сделал Гильберт.) Можно наглядно представить себе, что L описывает упругость пространства, “стремление” пространства оставаться плоским. Константа $c^3/16\pi G$, характеризующая упругость вакуума, велика, и пространство искривлено слабо, из-за того, что велика его упругость.

Может смутить то обстоятельство, что константа $c^3/16\pi G$ размерна, поэтому непонятно, относительно чего она является большой. В безразмерном виде силу гравитационного взаимодействия характеризует константа $Gm^2/\hbar c$, аналогичная константе электромагнитного взаимодействия $e^2/\hbar c = 1/137$. Из вида константы сразу получаем массу, характерную для гравитационного взаимодействия (так называемая планковская масса, сравните аналогичные рассуждения о слабом взаимодействии и о массе W -бозона в § 7.4):

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 10^{-5} \text{ г.}$$

Характерная квантовая длина этой массы:

$$l_{pl} = \frac{\hbar}{m_{pl}c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 10^{-33} \text{ см.}$$

Легко убедиться, что l_{pl} совпадает как раз с гравитационным радиусом r_g для планковской массы. Таким образом, искривление пространства велико на расстоянии l_{pl} от массы m_{pl} . Для известных элементарных частиц $m \sim 10^{-24} \text{ г} \ll m_{pl}$, $l \sim 10^{-13} \text{ см} \ll l_{pl}$, т. е. эффекты гравитации и искривления

пространства в объеме известных элементарных частиц чрезвычайно малы. Это и доказывает большую упругость вакуума.

Нельзя ли получить упругость пространства из каких-то более общих соображений? Из квантовой теории мы знаем, что вакуум обладает нулевыми колебаниями, которые, в частности, дают поправки в уровнях атома водорода (Лэмбовский сдвиг). Может быть такие эффекты приводят и к упругости вакуума? Такой подход удалось сформулировать, но при этом оказалось, что в теорию необходимо вводить частицы с массой m_{pl} .

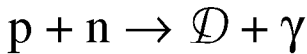
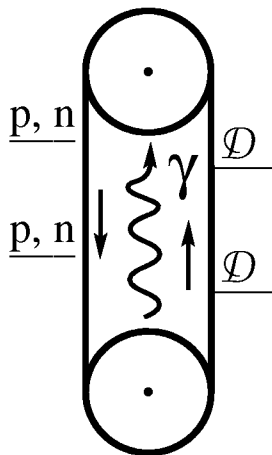
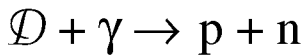
Таким образом, есть два принципиально различных направления:

1) из теории тяготения вывести существование частиц с m_{pl} .

2) из теории частиц получить константу G . (Подробнее см. книги Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова “Релятивистская астрофизика” и “Теория тяготения и эволюция звезд”).

§ 8.4. Гравитационное красное смещение. Замедление времени

В предыдущих разделах мы увидели, что основная идея ОТО о движении тел в искривленном пространстве-времени по геодезическим означает, что все тела падают в гравитационном поле по одинаковым траекториям с одинаковым ускорением.



Покажем сейчас с помощью ОТО и квантовой механики, что в гравитационном поле происходит замедление времени. Для этого рассмотрим один проект вечного двигателя. На установке из двух блоков (рис. 53) будем поднимать ядра дейтерия, а опускать протоны и нейтроны.

Пусть внизу протоны реагируют с нейтронами, а образующиеся γ -кванты используются наверху для диссоциации дейтерия. Масса D на 2,2 МэВ меньше $m_p + m_n$, поэтому под действием большей тяжести p - n система будет отдавать энергию, совершать вечное движение.

Ошибка этого проекта в том, что в действительности γ -квант не поглотится, так как часть его энергии уйдет на преодоление силы тяжести:

$$E'_\gamma = E_\gamma - \frac{gh}{c^2} E_\gamma = E_\gamma + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2} E_\gamma.$$

Рис. 53:

Энергия γ -кванта $E_\gamma = \hbar\omega$. Поскольку $E'_\gamma < E_\gamma$, то $\omega' < \omega$, т. е. частота фотонов испытывает красное смещение в гравитационном поле. Этот эффект уже наблюдался на Земле с помощью эффекта Мессбауэра (опыт Паунда и Ребки).

В общем случае можно написать

$$\omega_{\text{прин}} = \omega_{\text{исп}} \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right),$$

где $\Delta\varphi$ — различие гравитационного потенциала в местах испускания и приема. Это соотношение верно для фотонов любых частот. В данном месте частота фотонов зависит только от свойств испускающих их атомов (или ядер). На этих же свойствах основано и измерение времени в данном месте (атомные часы). Поэтому наблюдатель, находящийся в точке с другим гравитационным потенциалом, будет интерпретировать сдвиг частот как изменение хода времени:

$$\Delta\tau_{\text{прин}} = \Delta\tau_{\text{исп}} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right). \quad (8.2)$$

Раньше мы говорили об изменении в гравитационном поле метрики вообще, а теперь видим более конкретно, что изменяется течение времени в разных точках. Это можно интерпретировать как изменение коэффициента g_{00} при временной координате в метрике. Рассмотрев как изменяется g_{00} в слабом поле (т. е. ньютоновском случае), мы увидим, что g_{00} играет роль ньютоновского потенциала для медленных частиц.

Рассмотрим статическое гравитационное поле. По определению это значит, что метрику можно написать в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx_0)^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

причем ни g_{00} , ни $g_{0\alpha}$ не зависят от временной координаты x^0 . Пусть в некоторой точке r_1 испускаются два световых сигнала с запаздыванием Δx^0 и принимаются в точке r_2 (см. рис. 54). Поскольку g_{ik} от x^0 не зависит, мировая линия второго сигнала отличается от первой только сдвигом по координате x^0 на Δx^0 , т. е. запаздывание сигналов в точке приема по координатному времени тоже будет Δx^0 . Однако наблюдатель пользуется не координатным, а собственным временем τ . Это соответствует тому, что он в своей окрестности пользуется метрикой

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2.$$

Интервал между двумя событиями — приходом сигналов в точку r_2 — инвариантен (не зависит от выбора метрики), т. е.

$$\sqrt{g_{00}(2)} \Delta x^0 = c \Delta\tau_2.$$

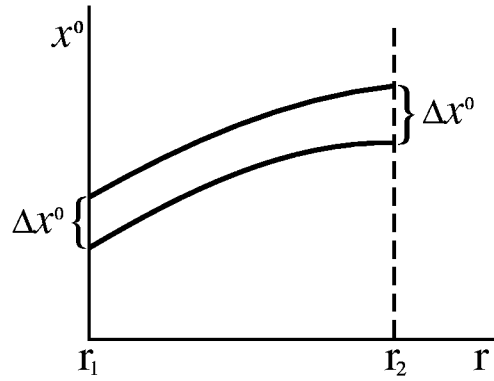


Рис. 54:

Отсюда и из (8.2) получаем связь g_{00} и ньютоновского потенциала φ :

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right).$$

Глава 9. СИЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ И СТРОЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

§ 9.1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим сферически-симметричное и статическое решение уравнений Эйнштейна. Введем сферические координаты, записав выражение для интервала в виде

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - g_{11} dr^2 - g_{22}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Вид угловой части метрики $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ следует из требования сферической симметрии. Из требования статичности находим, что g_{00} , g_{11} и g_{22} должны быть функциями только r . Кроме того, должно быть $g_{01} = 0$, иначе не будет обратимости во времени. Отсутствуют также члены типа $g_{r\varphi}$ из-за сферической симметрии.

Определим радиальную координату r так, чтобы $g_{22} = r^2$. При таком определении радиуса площадь сферы равна $4\pi r^2$, а длина окружности с центром в начале координат равна $2\pi r$. Однако это не значит, что точка, имеющая координату r , удалена от центра на расстояние r , так как геометрия теперь неевклидова.

Введем функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ так, что

$$g_{00} = e^{\nu(r)}, \quad g_{11} = e^{\lambda(r)},$$

т. е. метрика приобретает вид

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Из уравнений Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k = \frac{\varkappa}{c^2} T_i^k$$

после довольно долгих вычислений получим

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\varkappa}{c^2} T_1^1, \quad (9.1)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = \frac{\varkappa}{c^2} T_2^2 = \frac{\varkappa}{c^2} T_3^3, \quad (9.2)$$