

Отсюда и из (8.2) получаем связь  $g_{00}$  и ньютоновского потенциала  $\varphi$ :

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right).$$

## Глава 9. СИЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ И СТРОЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

### § 9.1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим сферически-симметричное и статическое решение уравнений Эйнштейна. Введем сферические координаты, записав выражение для интервала в виде

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - g_{11} dr^2 - g_{22}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Вид угловой части метрики  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  следует из требования сферической симметрии. Из требования статичности находим, что  $g_{00}$ ,  $g_{11}$  и  $g_{22}$  должны быть функциями только  $r$ . Кроме того, должно быть  $g_{01} = 0$ , иначе не будет обратимости во времени. Отсутствуют также члены типа  $g_{r\varphi}$  из-за сферической симметрии.

Определим радиальную координату  $r$  так, чтобы  $g_{22} = r^2$ . При таком определении радиуса площадь сферы равна  $4\pi r^2$ , а длина окружности с центром в начале координат равна  $2\pi r$ . Однако это не значит, что точка, имеющая координату  $r$ , удалена от центра на расстояние  $r$ , так как геометрия теперь неевклидова.

Введем функции  $\nu(r)$  и  $\lambda(r)$  так, что

$$g_{00} = e^{\nu(r)}, \quad g_{11} = e^{\lambda(r)},$$

т. е. метрика приобретает вид

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Из уравнений Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k = \frac{\varkappa}{c^2} T_i^k$$

после довольно долгих вычислений получим

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\varkappa}{c^2} T_1^1, \quad (9.1)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = \frac{\varkappa}{c^2} T_2^2 = \frac{\varkappa}{c^2} T_3^3, \quad (9.2)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\kappa}{c^2} T_0^0. \quad (9.3)$$

Все остальные уравнения обращаются в тождества  $0=0$ . Не диагональные компоненты тензора энергии-импульса (типа  $T_r^{\varphi}$  и т. п.) обращаются в нуль вследствие сферической симметрии (это означает, что нет склавающих напряжений). Отсутствует также компонента  $T_0^1$ , так как этот член соответствует потоку энергии по радиусу, а мы рассматриваем статические решения.

Мы использовали смешанные компоненты тензора  $T_i^k$ . В выражение  $T_{11}$  и  $T^{11}$  входят метрические коэффициенты. Пусть у нас есть метрика

$$dl^2 = a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + c^2 dz^2, \quad (9.4)$$

которая эквивалентна метрике

$$dl^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2, \quad (9.5)$$

где  $a dx = x'$ ,  $b dy = dy'$ ,  $c dz = dz'$ . Оказывается, что выражения для  $T_{11}$ , например, разные в (9.4) и (9.5). В смешанные компоненты вида  $T_1^1$  коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не входят, поэтому они одинаковы в исходной системе и локально-лоренцевой (если исходная система уже диагональна).

Начнем с того, что будем искать решение уравнений (9.1), (9.2), (9.3) в пустоте вокруг звезды (т. е. положим  $T_i^k = 0$ ). Введем  $f = e^{-\lambda}$ . Тогда

$$-\lambda' e^{-\lambda} = f'$$

$$\lambda' = -f'/f.$$

Теперь для уравнения (3) имеем

$$f \left( \frac{1}{r^2} - \frac{f'}{fr} \right) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$f = 1 - a/r$ ,  $a = \text{const}$ , т. е.  $g_{11} = e^{\lambda} = f^{-1} = 1/(1-a/r)$ . Вычитая из уравнения (1) уравнение (3), получим

$$\nu' + \lambda' = 0 \Rightarrow \nu + \lambda = \text{const}.$$

Выбор  $\text{const}$  просто определяет масштаб времени. Поэтому зададимся условием, что вдали от тела, где  $\lambda = 0$ , также и  $\nu = 0$ , т. е. переменная  $t$  есть время изменения далеким покоящимся наблюдателем. Тогда получим

$$\nu + \lambda = 0$$

Отсюда

$$e^{\nu} = g_{00} = 1 - a/r.$$

Мы получили известное решение Шварцшильда для пустого пространства вокруг сферического симметричного тела:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9.6)$$

При  $r \rightarrow \infty$  эта метрика переходит в метрику Минковского.

Из выражения (6) видно, что при  $r = a$  коэффициент при  $dt^2$  обращается в нуль, а при  $dr^2$  — в бесконечность.

Наблюдатель на некотором радиусе  $r$  пользуется локально-лоренцевой системой отсчета:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dl^2.$$

Для покоящегося наблюдателя в обеих системах  $dr, d\varphi, d\theta = 0$  и  $dl = 0$ . Поскольку  $ds^2$  — инвариант, получим

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2.$$

Вдали, при  $r \rightarrow \infty$

$$d\tau = \left(1 - \frac{a}{2r}\right) dt.$$

Так как мы уже выяснили связь потенциала с замедлением времени (§ 8.4), мы видим, что

$$-\frac{a}{2r} = \frac{\varphi}{c^2},$$

где  $\varphi$  — ньютоновский потенциал (мы убедимся в этом еще раз ниже, рассматривая движение частиц), но

$$\varphi = -\frac{GM}{r}, \text{ т. е. } a = \frac{2GM}{c^2} = r_g.$$

Величину  $r_g = a$  называют гравитационным радиусом (или радиусом Шварцшильда). Для звезды солнечной массы  $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  г;  $r_g = 3 \cdot 10^5$  см = 3 км (полезно запомнить!). Для Солнца метрику Шварцшильда можно применять до поверхности  $r_s = 7 \cdot 10^{10}$  см, т. е.  $r_g/r$  всюду мало. Для нейтронных звезд  $r_g/r$  достигает  $0,1 \div 0,2$ . Для черной (невращающейся!) дыры метрика Шварцшильда применима ко всей наблюдаемой области пространства, т. е. вплоть до  $r = r_g$ . Почему область  $r < r_g$  не наблюдаема (издали) будет объяснено позднее.

## § 9.2. Движение частиц в поле Шварцшильда

Теперь рассмотрим движение частиц в этом поле. По ньютоновской теории для частиц, покоящихся на бесконечности, используя закон сохранения энергии, имеем

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} = 0,$$

т. е.

$$v^2 = GM/r.$$

Определим наивно  $r_g$  как радиус, где  $v = c$ . Тогда (ср. § 1.7)

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Этот результат получил еще Лаплас. Подчеркнем, однако, что это не больше чем мнемонический прием. Очевидно, что Ньютоновская механика неприменима при  $v \sim c$ .

Теперь напишем строго уравнение движения частиц в поле Шварцшильда. В метрике, не зависящей от времени, сохраняется энергия, т. е. компонента  $p_0$  (именно с нижним индексом) 4-вектора импульса частицы:

$$p_0 = -mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds}.$$

В статическом поле

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - dl^2$$

или

$$ds = dt \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 - \frac{dl^2}{g_{00} dt^2}}.$$

Величина

$$\frac{dl}{\sqrt{g_{00}} dt} = \frac{v}{c}$$

это скорость, измеренная локальным наблюдателем. Тогда имеем

$$p_0 = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const}$$

(это соотношение не зависит от направления  $v$ ).

Пусть при  $r \rightarrow \infty$  ( $g_{00} \rightarrow 1$ )  $v \rightarrow 0$ , т.е.  $p_0 = mc^2$ . В этом случае всегда

$$1 - v^2/c^2 = g_{00} = 1 - r_g/r, \quad v^2 = c^2 r_g/r,$$

т.е. в ОТО имеет место связь между  $v$  и  $r$  в точности такая, как в ньютоновской механике и теории тяготения. В частности,  $r_g$  — это как раз тот радиус, где  $v = c$ , если при  $r = \infty$ ,  $v = 0$  в такой теории. Если  $v \neq 0$  на бесконечности, то

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}\right).$$

Таким образом, в точной теории в ОТО  $v = c$  только на  $r_g$  независимо<sup>12</sup> от значения  $v = v_\infty$  при  $r = \infty$ .

<sup>12</sup>В ньютоновской теории в этом случае  $v$  было бы равно  $c$  при  $r = r_g$ .

Еще раз подчеркнем, что  $v$  — это скорость, измеренная локальным наблюдателем.

В дальнейшем положим  $c = 1$ . При движении по радиусу в случае  $v = 0$  при  $r \rightarrow \infty$

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{r_g}{r}}.$$

Тогда, используя выражение для  $g_{00}$  и  $g_{11}$ ,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{r_g}{r}} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right),$$

$$t = \int_R^{r_g} \sqrt{\frac{r}{r_g}} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr.$$

При падении с конечного  $R$  этот интеграл логарифмически расходится при  $r \rightarrow r_g$ . Отметим, что  $dr/dt$  проходит через максимум и стремится к нулю при  $r \rightarrow r_g$ . Конечно, в шварцшильдовском поле нет отталкивания, хотя  $dr/dt \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow r_g$ , так как  $dr/dt$  — это не скорость.

Существует хорошее сравнение. Если мы будем бросать частицы на черную дыру, то мы увидим, что они замедляют движение и сгущаются вблизи  $r_g$ . Эта остановка не соответствует положению равновесия. Представим себе, что снимается на кинолентку прыгун, а потом при просмотре замедляется скорость движения пленки, так что в некоторый момент он остановится. То же самое при движении частиц. Если установить часы на частицах, которые действительно останавливаются в положении равновесия, то часы все равно идут. В случае дыры частицы останавливаются, но останавливаются и часы на них. По собственному времени никаких остановок не происходит. Просто с точки зрения удаленного наблюдателя часы замедляются из-за доплер-эффекта и из-за влияния гравитационного потенциала.

Представим себе падение газа, состоящего из отдельных частиц с точки зрения далекого наблюдателя. Оказывается, что газ скапливается вблизи  $r_g$ , но не отдает свою кинетическую энергию. Несмотря на то, что количество скопившегося газа неограниченно возрастает с течением времени, его плотность, измеренная в собственной системе (наблюдателя, движущегося вместе с газом), остается конечной в каждой точке пространства, в частности вблизи  $r_g$ .

Задача. Рассчитать радиальное движение для света (фотонов) в метрике Шварцшильда.

### § 9.3. Сферически-симметричное поле внутри звезды

Займемся теперь уравнениями в веществе. Начнем с уравнения (3) § 9.1. Оно содержит только  $\lambda$ . Пусть задано  $T_0^0(r)$ .

Известный метод решения неоднородных уравнений — метод вариации констант. Мы знаем, что  $f = 1 - a/r$  удовлетворяет однородному уравнению. Будем теперь считать, что  $a$  не является константой. Тогда после подстановки  $f$  в неоднородное уравнение все члены, не содержащие  $da/dr$ , сократятся, а мы получим

$$-\frac{1}{r^2} \frac{da}{dr} = \kappa T_0^0.$$

По определению

$$T_0^0 = -\rho c^2 = -\varepsilon.$$

Тогда

$$a(r) = \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^r \varepsilon r^2 dr.$$

Введем величину  $m(r)$ , такую, что

$$a(r) = \frac{2Gm(r)}{c^2},$$

т. е.

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Результат получился вроде бы тривиальный. Но на самом деле это не так. Элемент объема вовсе не равен  $4\pi r^2 dr$ . Поскольку метрика неевклидова, расстояние между равно не  $dr$ , а  $e^{\lambda/2} dr$ , т. е.  $dr/\sqrt{1 - \frac{r_a}{r}}$ , так что

$$dV = \frac{4\pi r^2 dr}{\left(1 - \frac{a(r)}{r}\right)^{1/2}}.$$

Таким образом,

$$m(r) < \int_0^r \rho dV.$$

Полная масса есть значение  $m$  на краю звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr < \int_0^R \rho dV.$$

Полная масса меньше суммы масс отдельных частей звезды, так как она складывается из масс, которые взаимодействуют гравитационно.

Если отдельные куски вещества (так же сжатые, как в звезде) разнести далеко друг от друга, то их полная масса была бы равна

$$M' = \int_0^R \rho dV = 4\pi \int_0^R \frac{\rho r^2 dr}{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}}.$$

Вычислим полное число барионов в звезде

$$N = \int_0^R n(r) \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{a(r)}{r}}}.$$

Здесь  $n$  — плотность числа барионов. Теперь определим массу  $M_0$ , равную

$$M_0 = m_0 N,$$

где  $m_0$  — масса ядра железа  $^{56}\text{Fe}$ , деленная на 56, т. е. это масса бариона, связанного в наиболее устойчивом ядре.

$(M_0 - M')c^2$  — это минимальная энергия, необходимая для того, чтобы “распылить” звезду на бесконечность.

Плотность вещества

$$\rho > n \cdot m_0,$$

так как при сжатии приходится затратить энергию. Сразу нельзя сказать, что больше

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr$$

или

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \frac{m_0 n r^2 dr}{\sqrt{1 - a(r)/r}},$$

так как  $\rho > m_0 n / (1 - a/r)^{1/2} > 1$ .

Поэтому в принципе энергия связи звезды

$$\mathcal{E} = (M - M_0)c^2$$

может быть положительной даже<sup>13</sup> в локально-равновесной системе и в разных моделях может иметь разный знак. С этим связан и вопрос о том, сколько

<sup>13</sup>При отсутствии локального равновесия возможность  $\mathcal{E} > 0$  тривиальна: такова, например, ситуация для Солнца. Это означает лишь, что энергия ядерной реакции превращения водорода и гелия в железо превышает отрицательную энергию гравитационного взаимодействия. Солнце не взрывается потому, что ядерная реакция идет медленно и тепло отводится излучением.

выделяется энергии при образовании звезды. Мы получили, что масса такой звезды

$$M = 4\pi \int \rho r^2 dr,$$

и полная масса барионов того же вещества на бесконечности

$$M = 4\pi \int m_0 n \sqrt{g_{11}} r^2 dr$$

где  $m_0$  — масса бариона в ядре железа. Как уже говорилось, в принципе могут быть решения с  $M > M_0$ , хотя их трудно получить в природе, так как для их образования необходимо затратить энергию. Эти решения неустойчивы относительно разлета на бесконечность. Устойчивы ли они относительно малых возмущений — сказать нельзя без подробных расчетов. По-видимому, ветвь нейтронных звезд малой массы  $M < 0,2M_\odot$  имеет  $\mathcal{E} > 0$ , но устойчива относительно малых возмущений (см. ниже). Решения с отрицательной энергией связи ( $M < M_0$ ) могут получиться в результате естественной эволюции. Мы увидим позже, однако, что все решения неустойчивы относительно образования черной дыры, но по отношению к большим возмущениям.

Запишем выражение для массы звезды в виде

$$M = M_0 + 4\pi \int \rho r^2 dr - 4\pi \int n m_0 \sqrt{g_{11}} r^2 dr.$$

Обозначим через

$$4\pi n \sqrt{g_{11}} r^2 dr = dN$$

число барионов в слое  $(r, r + dr)$ .

Введем

$$m = \rho/n = m_0 + E/c^2,$$

где  $E$  — добавочная энергия, затраченная при сжатии. С этими обозначениями

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \underbrace{4\pi \int \rho r^2 dr - \int m dN}_{\text{дефект массы}} + \underbrace{\int m dN - \int m_0 dN}_{\text{внутренняя энергия}} = \\ &= M_0 + \int 4\pi \rho (1 - \sqrt{g_{11}}) r^2 dr + \int (E/c^2) dN. \end{aligned}$$

С точностью до величин первого порядка

$$\sqrt{g_{11}} = 1 + \frac{Gm(r)}{c^2 r} + \dots,$$

т. е.

$$M = M_0 - \int \frac{Gm dm}{c^2 r} + \frac{1}{c^2} \int E dN + \dots$$



Полученное соотношение было точным выражением для полной энергии звезды в ньютоновской теории. По порядку величины

$$M = M_0 - K_1 \frac{GM_0^2}{c^2 R} = M_0 - K_2 M_0 \frac{r_g}{R},$$

т.е. можно сказать, что точные для ньютоновской теории соотношения являются лишь первыми членами разложения по степеням  $r_g/R$  для энергии звезды в ОТО (по теореме вириала тепловая энергия имеет тот же порядок величины, что и гравитационная).

В следующем порядке появляется член  $\sim (r_g/R)^2$ . Мы уже знаем, что при  $\gamma \rightarrow 4/3$   $|\mathcal{E}_{\text{грав}}| = \mathcal{E}_{\text{тепл}}$ , т.е. член  $r_g/R$  исчезает, и для расчета устойчивости становятся важны поправки  $\sim (r_g/R)^2$ . Эффекты ОТО приводят к тому, что при центральной плотности звезды больше некоторой, массы белых карликов начинают убывать (см. рис. 45). Важен также учет ОТО для случая сверхмассивных горячих звезд, где из-за роли давления излучения показатель адиабаты также стремится к  $4/3$ .

Не решая пока уравнения Эйнштейна до конца, попробуем уже сейчас выяснить некоторые свойства метрики внутри звезды. Из-за сферической симметрии достаточно рассмотреть геометрию одной “плоскости”, проходящей через центр, чтобы охарактеризовать все трехмерие. Метрика такой поверхности такая же, как в плоском трехмерном пространстве на изогнутой поверхности вращения (“тарелке”, см. рис. 55а). Для такой поверхности

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + g_{11} dr^2,$$

где

$$g_{11} = \cos^{-2} \alpha.$$

Выясним асимптотику при  $r \rightarrow 0$ , т. е. в центре. Пусть центральная плотность  $\rho_c$  конечна. Тогда  $m(r) \sim r^3$  и, используя

$$g_{11} = \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right]^{-1},$$

получим

$$g_{11} = 1 + \text{const} \cdot r^2.$$

С другой стороны,

$$g_{11} = 1 + \alpha^2$$

т. е.

$$\alpha \sim r.$$

Поэтому в центре имеем обыкновенную точку (касательная горизонтальна). В принципе может быть особое решение

$$\rho \sim b/r^2, \quad m \sim r, \quad g_{11} \rightarrow \text{const} \neq 1,$$

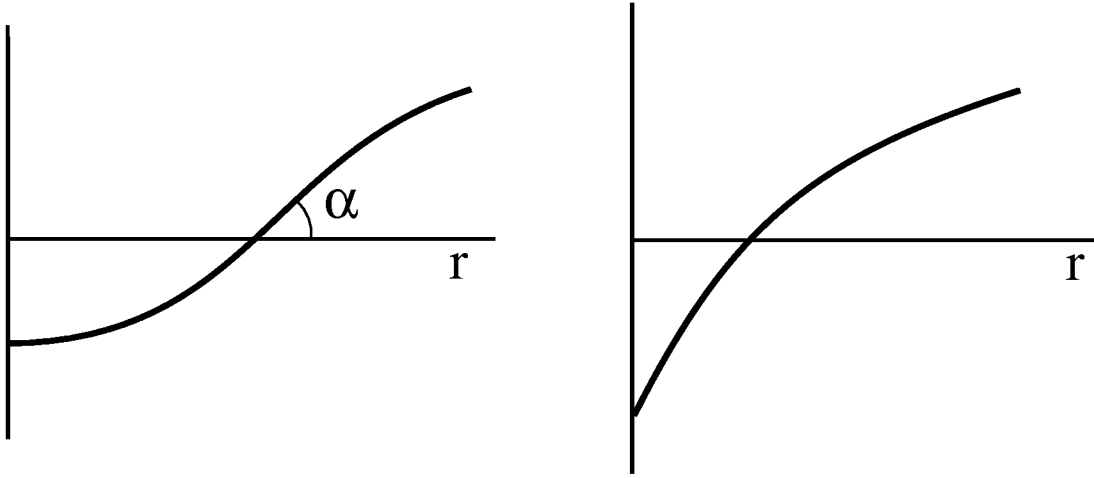


Рис. 55:

т.е. в центре появляется коническая точка с бесконечной кривизной (рис. 55b) — это решение является асимптотической серией несингулярных решений при  $\rho_i \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь асимптотику при  $r \rightarrow \infty$ ,

$$m = M = \text{const.}$$

Имеем

$$g_{11} = 1 + \text{const}/r = 1 + \alpha^2,$$

$$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow 0,$$

т.е. на бесконечности пространство опять плоское (хотя высота “тарелки” и бесконечна).

Продолжим решение уравнений. До сих пор мы использовали только одно уравнение ОТО, куда входит слева  $g_{11}$  (и не входит  $g_{00}$ ), а в правую часть  $T_0^0 \sim \rho$ .

Очень важно заметить, что до сих пор не подразумевалось, что распределение плотности равномерно. Необходим только покой ( $\lambda, \nu = 0$ ). Скорости равны нулю, а ускорения могут быть любыми. Условие равновесия мы нигде не использовали. Поэтому полученное выражение для  $M$  удобно в дальнейшем использовать для исследования устойчивости звезды.

Вернемся к равновесным звездам. Следующие уравнения (вместе с условиями стационарности  $\lambda, \nu = 0$ ), куда входит давление, дадут условие равновесия. Ограничимся случаем паскалевой жидкости

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P.$$

В уравнении (1) § 9.1 входит только  $dv/dr$ , а в (9.2) еще  $d^2\nu/dr^2$ . Дифференцируя первое уравнение, исключая  $d^2\nu/dr^2$ ,  $dv/dr$ ,  $d\lambda/dr$ ,  $\nu$  и  $\lambda$ , после

алгебраических преобразований получаем уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left( m + 4\pi P \frac{r^3}{c^2} \right)}{r^2 \left( 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)}.$$

Напомним, что в ньютоновской теории

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G\rho m}{r^2}.$$

Отличия ОТО от ньютоновской теории таковы: 1) вместо  $\rho$  входит  $\rho + P/c^2$ , т. е. давление “весит”; 2) сила притяжения зависит не только от  $m$ , но и от  $P$ :

$$m \longrightarrow m + 4\pi P r^3 / c^2$$

(ясно, что эти поправки существенны, когда  $P/c^2$  сравнимо с  $\rho$ , т.е. для релятивистского вещества); 3) при  $r \longrightarrow r_g(r)$  имеем  $dP/dr \longrightarrow \infty$ , ускорение  $g \longrightarrow \infty$ , так как в знаменателе уравнения равновесия в ОТО стоит  $r(r - r_g)$  вместо ньютоновского  $r^2$ .

Надо иметь в виду, что физический градиент давления равен

$$\frac{dP}{dl} = \frac{dP}{\sqrt{g_{11}} dr} \sim \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}},$$

поэтому ускорение растет не как  $(1 - r_g/r)^{-1}$ , а по закону  $(1 - r_g/r)^{1/2}$ . На нашей двумерной поверхности, “изображающей” метрику, при  $r = r_g$  стенки “тарелки” становятся вертикальными (рис. 56).

Задавшись уравнением состояния  $P(\rho)$ , можно интегрировать уравнение равновесия и уравнение непрерывности

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr$$

при произвольно выбранном значении в центре  $\rho_c$  и соответствующим  $P_c$ . При любом разумном уравнении состояния мы получим падающее решение, идущее в нуль на краю звезды.

Что будет, если центральная плотность очень велика ( $\rho_c \longrightarrow \infty$ ), не получится ли бесконечная масса?

Возьмем степенное уравнение состояния. Пусть  $n$  — плотность барионов,

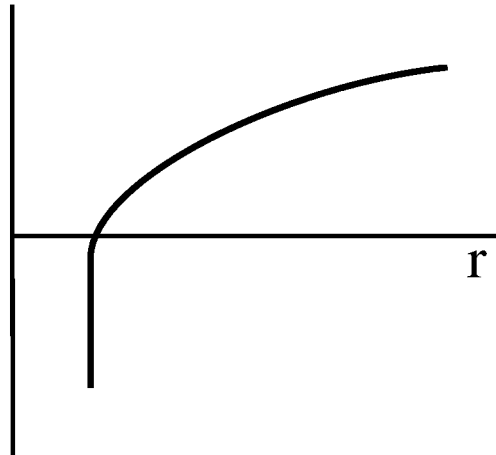


Рис. 56:

$v = 1/n$ ,  $E$  — энергия на барион. В изэнтропическом случае  $dE = -Pdv$ . Поскольку  $E = \rho c^2/n$ ,

$$c^2 d\left(\frac{\rho}{n}\right) = -P d\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{P}{n^2} dn.$$

Отсюда

$$d\rho = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{dn}{n}.$$

Если  $\rho = An^k$ , то

$$P = c^2(k-1)\rho = (k-1)\varepsilon.$$

Здесь мы выписали общее степенное уравнение ( $k = 4/3$  — ультрарелятивистский газ,  $k = 2$  — предельно жесткое уравнение состояния, так как в этом случае скорость звука  $(\partial P/\partial \rho)^{1/2} = c$ ).

Пусть  $\rho = b/r^2$ ,

$$P = c^2(k-1)b/r^2.$$

Тогда

$$\frac{2Gm}{c^2 r} = \text{const} \equiv \alpha = \frac{8\pi b G}{c^2}.$$

Подставляя  $\rho$ ,  $P$  и  $m$  в уравнение равновесия, получим

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{k^2}{4(k-1)},$$

т.е. существует решение, где “тарелка” идет на конус, но для каждого показателя  $k$  конус имеет свой наклон.

Текущая масса  $m \sim r$ , но это справедливо только в области больших плотностей, затем  $\rho$  спадает быстрее, чем  $1/r^2$ , и  $m$  становится конечным. Таким образом, даже при  $\rho_c \rightarrow \infty$  масса остается конечной!

При этом общая масса звезды зависит от того значения плотности  $\rho_1$ , при котором уравнение состояния перестает быть степенным, т. е. где нарушается пропорциональность  $P$  и  $\rho$ .

Аналитическое исследование для степенных уравнений состояния и численные расчеты показывают, что зависимость  $M(\rho_c)$  ведет себя как на рис. 57, т. е. после первого максимума возникают колебания кривой  $M(\rho_c)$ . Анализ показывает, что все решения за первым максимумом неустойчивы. Значение максимальной массы  $M_{\text{max}}$  получается разным при разных уравнениях

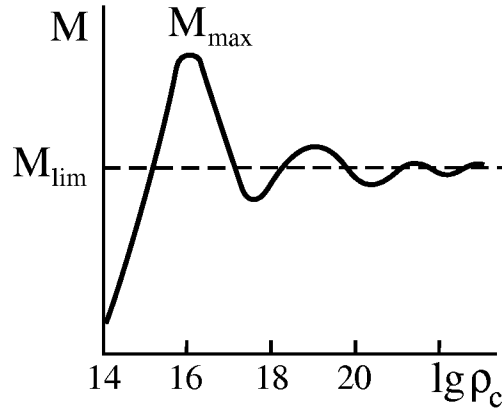


Рис. 57:

состояния. Для газа свободных нейтронов Оппенгеймер и Волков получили  $M_{\max} = 0,7 M_{\odot}$ <sup>14</sup>. Современные расчеты, учитывающие межнуклонные взаимодействия, дают для нейтронных звезд  $M_{\max} = 1,8 \div 2,4 M_{\odot}$ . Еще раз напомним, что масса здесь понимается как источник гравитационного поля для внешнего наблюдателя. Масса того же числа барионов существенно больше  $M_{0 \max} \sim (2,2 \div 3,2) M_{\odot}$ , так что энергия связи отрицательная. Нейтронные звезды большой массы устойчивы относительно разлета на бесконечность, при их образовании выделяется энергия  $\sim 20\%$  начальной энергии покоя, т.е. величина, во много раз превышающая ядерную энергию.

Задача. Известно, что предельно жестком уравнении состояния  $P = \rho c^2 = \text{const} \cdot n^2$  (Я. Б. Зельдович) в ньютоновской теории масса звезды  $M \rightarrow \infty$  при  $P_c \rightarrow \infty$ . С помощью уравнения гидростатики показать, что в ОТО даже в случае несжимаемой жидкости ( $P \rightarrow \infty, n = n_0 = \text{const}$ ) масса остается конечной при  $P_c \rightarrow \infty$ .

#### § 9.4. Общие свойства равновесия релятивистских звезд

Рассмотрим некоторые общие свойства этих решений для равновесных релятивистских звезд. Механическое равновесие соответствует минимуму энергии (т. е. массы) — в общем случае экстремуму при данном количестве барионов и данном распределении энтропии по барионам. В частном случае холодного вещества энтропия везде равна нулю. Решение, устойчивое относительно радиальных перемещений, при этом всегда безразлично относительно конвекций.

1. Пусть дано некоторое распределение энтропии  $S$ . В сферически-симметричном случае  $S$  является функцией текущего числа барионов:

$$F = \int_0^r n \sqrt{-g_{11}} 4\pi r^2 dr, \quad F(R) = N.$$

$F$  — лагранжева координата, поэтому при всех вариациях  $S(F)$ , в отличие от  $S(r)$ , всегда фиксирована. Состояние равновесия соответствует минимуму  $M$  при данном  $S(F)$  при вариациях  $n(F)$  (или  $r(F)$ ). (Вопрос о конвективной устойчивости здесь не ставится.)

2. Пусть звезда изэнтропична:  $S = \text{const}$ . Можно и в этом случае действовать по-прежнему, т. е. находить минимум  $M$  при вариациях  $n(F)$  и фиксированном  $N$ , но теперь проявляется еще одна степень свободы: мы можем переставлять частицы между любыми слоями. При перестановке энергия не должна меняться (в первом порядке). Отсюда сразу получается условие на

<sup>14</sup>При этом учитывается, что нейтроны являются фермионами, и рассматривается холодный вырожденный нейтронный газ. В центральной области нейтроны умеренно релятивистские.

химический потенциал вещества  $\mu$ :

$$\mu e^{\nu/2} = \text{const} \quad (9.7)$$

по звезде. Химпотенциал определяется как приращение энергии системы при добавлении единицы массы покоя:

$$\mu = c^2 \left( \frac{d\rho}{d\rho_0} \right)_S = \frac{\rho c^2 + P}{m_0 n}.$$

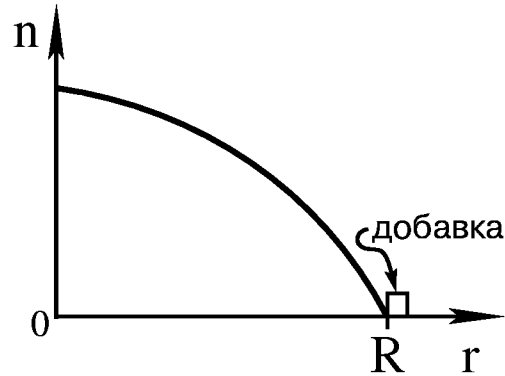
Такой вид выражения для  $\mu$  объясняется тем, что если внутри звезды поместить элемент массы  $\Delta m_0$ , то работа  $\Delta m \sim \Delta m_0 \rho / \rho_0 +$  (работа по раздвиганию окружающего вещества)  $\sim \Delta m_0 P / \rho_0$ . Множитель  $e^{\nu/2}$  играет роль гравитационного потенциала (работа по перенесению барионов из бесконечности равна  $\Delta M_0 e^{\nu(R)/2}$ ). Константу в (9.7) легко найти из условий на поверхности. Там  $P = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mu = c^2$ ,

$$e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}.$$

Итак,

$$\mu e^{\nu/2} = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)^{1/2}.$$

Предположим, что мы хотим подсчитать, как изменится масса звезды  $M$  при изменении числа барионов, т. е. при изменении  $M_0$ . Для этого нам нужно сравнить два близких, но разных решения. Эти два решения различаются во всех точках. Но из принципа экстремума ясно, что можно сначала добавить барионы на поверхности (см. рис. 58). При этом, во-первых, изменится масса



$$M_1 = M_0 + \Delta M_0 e^{\frac{\nu(R)}{2}}.$$

Рис. 58:

Во-вторых, это решение не равнолвесно. Поэтому звезда перестроится. Но изменение массы при перестройке около равновесия имеет высший порядок малости, поэтому в первом порядке масса и после перестройки та же (ср. § 1.7, 1.8). В результате имеем

$$\frac{dM}{dM_0} = e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \left( 1 - \frac{r_g}{R} \right)^{1/2} < 1.$$

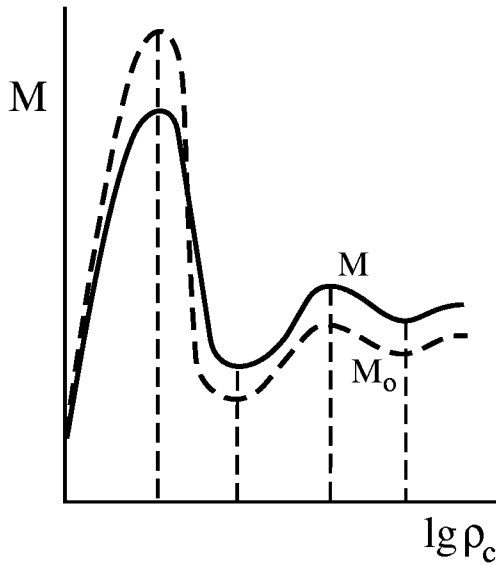


Рис. 59:

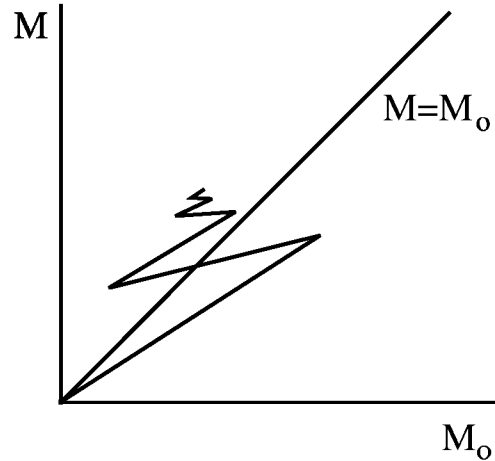


Рис. 60:

Следовательно,

$$\frac{dM}{d\rho_c} = \frac{dM_0}{d\rho_c} e^{\nu/2},$$

т. е. экстремумы кривых  $M(\rho_c)$  и  $M_0(\rho_c)$  совпадают (рис. 59). Интересно, что при некоторой  $\rho_c$  величина  $M$  становится больше  $M_0$ . Как это может получиться, если  $dM/dM_0$  всегда меньше единицы? Все объясняется просто: кривая  $M(M_0)$  не гладкая (рис. 60), поэтому она может пересечь биссектрису  $M = M_0$ .

### § 9.5. Устойчивость релятивистских звезд

Точно также, как и в случае белых карликов, можно показать, что первый максимум на кривой  $M(\rho_c)$  соответствует устойчивости (см. § 7.2). Однако появление минимума  $M(\rho_c)$  здесь уже не означает возврата к устойчивому состоянию. Оказывается, что в  $n$ -ом экстремуме кривой  $M(\rho_c)$  теряет устойчивость  $n$ -я собственная мода радиальных колебаний.

Устойчивыми оказываются только звезды с  $\rho_c < \rho_{c \max}$ . Однако они устойчивы только относительно малых возмущений. Сейчас мы докажем, что относительно достаточно больших возмущений неустойчиво любое равновесие (теорема Зельдовича).

Когда мы говорим, что при некотором  $\rho_{c0}$  равновесие звезды устойчиво, то это значит, что любые неравновесные конфигурации с тем же числом барионов (т. е. с тем же  $M_0$ ) имеют в окрестности нашего решения  $M(\rho_c) > M(\rho_{c0})$ . Покажем, что при больших  $\rho_c$  есть конфигурации с очень малой массой:  $M \ll M(\rho_{c0})$  (при той же  $M_0$ ), т. е. относительно больших возмущений всегда есть неустойчивость.

Напишем выражение для массы звезды, которое, как мы уже говорили, верно и для неравновесных конфигураций:

$$M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr.$$

Число барионов

$$4\pi \int_0^R n(r) \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g(r)}{r}}}.$$

Считаем, что для барионов справедливо уравнение состояния ультрарелятивистского газа:

$$\rho \sim n^{4/3}.$$

Пусть

$$\rho = A/r^2, \text{ следовательно, } r_g(r)/r = 8\pi AG/c^2.$$

Теперь получим, что

$$M = \text{const} \cdot N^{3/2} A^{1/2} (1 - 8\pi AG/c^2).$$

Видно, что всегда можно выбрать  $A$  так, что  $M$  сколь угодно мало:  $M \rightarrow 0$  при  $\rho_c \rightarrow \infty$ . Но ясно, что при конечных  $\rho_c$  должны быть точки с малым  $M$ , что и доказывает неустойчивость любого состояния.

Оценим величину барьера, который надо преодолеть, чтобы звезда потеряла устойчивость. Будем работать в системе единиц  $\hbar = c = 1$  ( $G \neq 1$ ). В этих единицах размерность длины совпадает с размерностью обратной массы:

$$[px] = [h] = [mcx], \quad [x] = [h/mc] = [1/m].$$

$$[\text{Энергия}] = [E] = [mc^2] = [m] = [1/x], \quad [Gm^2] = [e^2] = [Ex] = [x^0],$$

т. е.  $Gm^2$  в этих единицах безразмерно.

В ультрарелятивистском газе энергия частицы  $E = cp_F = n^{1/3}$ , следовательно, энергия звезды (масса)

$$M = EN = Nn^{1/3},$$

а радиус

$$R \sim (N/n)^{1/3}.$$

Теперь мы хотим, чтобы радиус конфигурации, состоящей из данного числа барионов, равнялся гравитационному радиусу звезды

$$r_g = GM = GN(n)^{1/3} = N^{1/3}n^{-1/3} = R,$$



т. е.

$$n = N^{-1} G^{-3/2}.$$

Чтобы сжать вещество до такой плотности, надо затратить энергию

$$\Delta M = N^{2/3} G^{-1/2} - Nm.$$

Отсюда видно, что при  $N = N_{\text{крит}}(Gm^2)^{-3/2}$  барьера вообще нет. Это критическое число барионов соответствует максимальной равновесной массе, так как она может сколлапсировать без барьера (ср. § 2.4). Для малых  $N < N_{\text{крит}}$  относительная величина барьера растет:

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \left( \frac{N_{\text{крит}}}{N} \right)^{1/3} - 1.$$

Пример Земли:  $M_{\oplus} = 3 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ . Для того, чтобы перейти барьер, необходимо затратить энергию около  $100 M_{\oplus} c^2$ .

Однако в действительности эта оценка барьера не имеет смысла. Мы определили величину барьера из соображений подобия, т. е. считали, что звезда сжимается гомологически. А это вовсе не обязательно. Экономнее сжать в центре малую часть и заставить ее сколлапсировать. Потом на образовавшуюся черную дыру упадет все вещество. Беря все меньшее количество вещества, необходимо затрачивать все меньшее количество энергии, чтобы заставить его сколлапсировать.

Хотя для малых масс энергия мала, этот результат нельзя найти методом малых возмущений, так как  $\delta E/E$  становится все больше и больше. Еще раз повторим, что плотность, до которой надо сжать вещество, с уменьшением массы возрастает (ср. § 7.1):

$$\rho = 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M)^2 [\text{г}/\text{см}^3].$$

Таким образом, в классической ОТО барьер сводится к нулю. Однако, как обычно считают, квантовые эффекты становятся важными при  $r_g < 10^{-33}$  см, т. е.  $m \sim 10^{-5}$  г. Здесь барьер  $\sim mc^2 = 10^{16}$  эрг =  $10^9$  Дж (это не так мало). Однако трудность здесь не в энергии, а в том, чтобы создать столь малый радиус. Надо различать явления необходимые (т. е. неизбежные) и возможные, по крайней мере, в принципе. Коллапс холодного вещества с массой  $M > 2 M_{\odot}$  необходим, т. е. массивные звезды должны коллапсировать после исчерпания ядерного горючего. Можно сомневаться, сколько их в нашей Галактике:  $10^8$  или  $10^3$ . Но в принципе они должны существовать.

Те маломассивные черные дыры, о которых мы выше говорили, не обязательно существуют, так как они не пролучаются в результате эволюции звезд. Однако они могут в принципе образоваться на самых ранних стадиях расширения Вселенной из первичного вещества и приводить к интересным

космологическим следствиям. Как показал Хокинг, такие черные дыры за счет квантовых процессов испускают тепловое излучение с эффективной длиной волны  $r_g$ . При этом черная дыра, теряя массу, “испаряется”.

Для черных дыр звездного происхождения  $M \sim M_\odot$  эффект испарения незначителен, увеличение массы в результате процессов аккреции окружающего газа гораздо сильнее. Для малых черных дыр, в особенности первичных, эффект велик, возникает множество интересных вопросов, которые однако, лежат за пределами данной книги.

### § 9.6. Несферические поля тяготения

Наиболее характерное свойство поля Шварцшильда — то, что на некотором расстоянии ( $r < r_g$ ) невозможен покой частиц. Сфера Шварцшильда касательна световому конусу (см. рис. 61), поэтому никакие частицы (в том числе и ультрарелятивистские) не могут выйти из-под радиуса  $r_g$ , т. е. сферу Шварцшильда можно пересечь только снаружи внутрь. Решение Шварцшильда относится к случаю сферически-симметричного распределения вещества. Мы знаем, что идеальных сферически-симметричных объектов не существует. Поэтому возникает естественный вопрос — насколько свойства этого решения устойчивы относительно возмущений сферической симметрии?

Устойчивость шварцшильдовской сингулярности относительно малых возмущений метрики исследовали Редже и Уилер. Они пришли к выводу, что для стационарных возмущений есть поля только двух типов — с особенностью или на поверхности Шварцшильда или на бесконечности. Сразу возникает подозрение, что поверхность Шварцшильда может быть неустойчива.

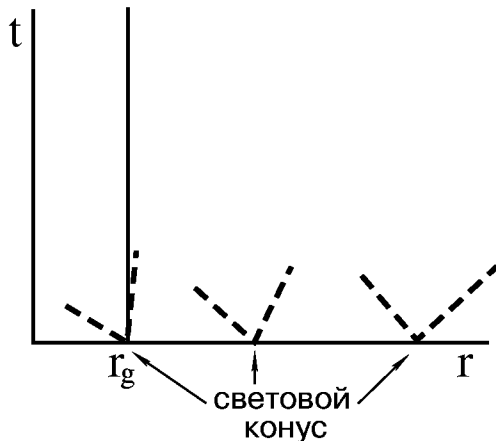


Рис. 61:

Методом Редже–Уилера можно исследовать устойчивость только относительно малых возмущений. Другой путь (позволяющий исследовать большие возмущения) — это получение точных решений уравнений ОТО, в которых снято требование сферической симметрии. Статические решения для осесимметричного распределения масс очень давно получил Вейль. В этом решении источник поля (т. е. некоторое тело) предполагается ограниченным. Поэтому на бесконечности метрика должна переходить в евклидову. Решение Вейля в частном случае совпадает с решением Шварцшильда (строго говоря, его можно перевести

в частном случае совпадает с решением Шварцшильда (строго говоря, его можно перевести

в решение Шварцшильда некоторым преобразованием координат).

А в общем случае существует квадрупольный момент гравитационного поля. В этом решении поверхность  $g_{00} = 0$  обладает совсем другими свойствами, чем сфера Шварцшильда (где  $g_{00} = 1 - r_g/r = 0$  при  $r = r_g$ ). В частности, на поверхности  $g_{00} = 0$  есть истинная особенность пространства-времени. В метрике Шварцшильда инвариант

$$C = R_{iklm}R^{iklm} = 12/r_g^2 \quad \text{при } r = r_g,$$

т. е. истинной особенности нет (хотя  $g_{11} = (1 - r_g/r)^{-1} \rightarrow \infty$ , однако в действительности пространство гладко — есть системы отсчета, где все  $g_{ik}$  — гладкие до центра; это значит просто, что метрика Шварцшильда в обычной записи не годится для описания пространства при  $r < r_g$ ). В решении Вейля  $C$  имеет особенность на поверхности  $g_{00} = 0$ :

$$C = Aq^2 g_{00}^{-1} + 12/r_g^4 + \dots,$$

где  $q$  — квадрупольный момент. Кроме того, в отличие от поля Шварцшильда, свет достигает этой поверхности за конечное время. Это отражает свойства, найденные Редже и Уилером: те возмущения, которые конечны на бесконечности, имеют особенность на поверхности  $g_{00} = 0$ .

Эти выводы не являются свойством специально квадрупольного отклонения от сферической симметрии. Можно показать, что они являются общими для любого статического аксиально-симметричного решения.

Могут ли реальные тела создать поле Вейля во всей области  $g_{00} > 0$ ? Как уже говорилось, на бесконечности, в евклидовой области, поле Вейля соответствует гравитационному полю статического тела с неравным нулю квадрупольным моментом. Однако статическое тело не может дать такое поле вплоть до поверхности  $g_{00} = 0$  уже потому, что тогда обращается в бесконечность гравитационная сила. Это было верно и в поле Шварцшильда, но мы знаем, что его можно реализовать нестатическими телами, движущимися сферически-симметричным образом (коллапсар).

Нельзя ли реализовать решение Вейля нестатическими телами? Оказывается и это невозможно. Можно показать, что при коллапсе в сопутствующей системе отсчета момент перехода границе тела поверхности  $g_{00} = 0$  ничем не выделен: в этот момент на поверхности тела нет истинных особенностей пространства-времени ( $C \neq \infty$ ), а в решении Вейля они есть. Итак, появление истинной особенности в этом решении означает, что такое распределение масс реализовано быть не может. Это связано с тем, что уравнения поля одновременно являются уравнениями движения.

Совершенно так же можно убедиться, что рассмотрение статически малых возмущений решения Шварцшильда, проведенное Редже и Уилером, говорит не о неустойчивости этого решения, а о физической невозможности реализовать такие возмущения. Точнее говоря, статические возмущения поля Шварцшильда можно получить, только поместив сферу Шварцшильда во внешнее

возмущающее поле. В решении Редже-Уилера это соответствует возмущениям конечным на  $r_g$  и расходящимся на бесконечности.

Имеются осесимметричные решения уравнений ОТО в вакууме ( $R_{ik} = 0$ ) и другого типа — это решения Керра. Приведем метрику Керра в виде, данном Бойром и Линдквистом:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left( \frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right). \quad (9.8)$$

Мы записали выражение для  $ds^2$  в таких единицах, что  $c = 1$ ,  $G = 1$ . Смысл символов  $m$  и  $a$ , как всегда, находим исследованием предельных случаев. Сразу видно, что при  $a \rightarrow 0$  метрика Керра переходит в решение Шварцшильда, т. е.  $m$  можно интерпретировать как массу тела (в наших единицах  $r_g = 2m$ ). Смысл символа  $a$  выясняется при переходе к бесконечности  $r \rightarrow \infty$ . Очевидно, тогда

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - r_g/r,$$

так же как для поля Шварцшильда. Но есть и одно существенное отличие:

$$g_{03} = g_{t\varphi} = -\frac{2am}{r} \sin^2 \theta \quad (\text{при } r \rightarrow \infty),$$

т. е. недиагональная компонента метрики  $g_{03}$  отлична от нуля. В ОТО показывают (см., например, “Теорию поля” Ландау и Лившица), что в слабом поле (т. е. при  $r \rightarrow \infty$ ) у вращающегося тела с моментом вращения  $K$  появляется компонента  $g_{03}$  именно такого вида:

$$g_{03} = \frac{2K}{r} \sin^2 \theta.$$

Это позволяет считать, что метрика Керра описывает внешнее поле тела, вращающегося с моментом

$$K = -am.$$

При получении выражения для  $g_{03}$  в случае  $r \rightarrow \infty$  мы по существу вели разложение по степеням  $a/r$ , поэтому это выражение остается справедливым и в сильном поле вплоть до  $r \rightarrow r_g$ , если  $a \rightarrow 0$ . Метрика, записанная в виде (9.8), имеет смысл только при  $0 \leq a \leq m$ , т. е.  $a = m$  соответствует максимально возможному моменту центрального тела (т. е.  $K_{\max} = m^2$  или в обычных единицах  $K_{\max} = Mcr_g/2 = GM^2/c$ ).

Если подсчитать скаляр кривизны  $C$ , то окажется, что метрика имеет особенность только при  $r = 0$ . Это наталкивает на мысль, что метрика Керра в отличие от метрики Вейля может быть реализована реальными телами.

Рассмотрим, во что переходит поверхность Шварцшильда в метрике Керра. В шварцшильдовском случае сфера  $r = r_g$  обладала двумя главными свойствами: на ней  $g_{00} = 0$  и, кроме того, ее касался световой конус. Из-за второго свойства сфера Шварцшильда являлась как бы “клапаном”: никакие частицы не могли пересечь ее изнутри наружу. Этот клапан, т. е. поверхность, касательную световому конусу, называют “горизонтом событий”. В метрике Керра оказывается, что поверхность  $g_{00} = 0$  и горизонт событий не совпадают. Можно найти, что поверхность  $g_{00} = 0$  определяется выражением

$$r_{\text{ш}} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

а горизонт событий

$$r_{\text{гор}} = m + \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Очевидно, что  $r_{\text{ш}} \geq r_{\text{гор}}$ . Так же как в поле Шварцшильда условие  $g_{00} \geq 0$  ограничивает область, где можно покоиться. Однако в метрике Шварцшильда  $r_{\text{ш}} = r_{\text{гор}}$ . Поэтому частицы с  $r < r_{\text{ш}}$  могли двигаться только к центру. Теперь частицы с  $r < r_{\text{ш}}$ , но  $r > r_{\text{гор}}$  могут двигаться по радиусу в любую сторону, в частности, может быть  $r = \text{const}$  (хотя для них невозможно  $\varphi = \text{const}$ , они обязаны двигаться по  $\varphi$  в ту же сторону, что вращается тело). Область  $r_{\text{гор}} \leq r \leq r_{\text{ш}}$  называют эргосферой.

Как будет меняться метрика в присутствии свободно падающих частиц? Частицы, которые движутся навстречу вращению тела, захватываются раньше. Поэтому, если на центральное тело падают частицы, имеющие изотропное распределение по скоростям на бесконечности, то метрика Керра теряет момент и переходит в метрику Шварцшильда, а облако частиц приобретает момент (так как частицы захватываются выборочно).

Приведем выражение для прицельного параметра гравитационного захвата частицы, движущейся в экваториальной плоскости:

а) при  $v_{\infty} \ll c$ :

$$l = \frac{c}{v_{\infty}} \left[ 1 + \left( 1 \pm \frac{|a|}{m} \right)^{1/2} \right] r_{\text{ш}}$$

(выбор знака зависит от направления момента частицы относительно момента центрального тела). При  $a = 0$ ,  $l = (2c/v_{\infty})r_g$ : б) при  $v_{\infty} = c$  (здесь тоже важен знак момента частицы):

$$l_+ = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} (\pi - \arccos |a/m|) \right] r_{\text{ш}},$$

$$l_- = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos |a/m| \right] r_{\text{ш}}.$$

Зависимость параметров захвата в метрике Керра от знака момента интересно проявляется в случае дисковой аккреции. Торн показал, что при  $a \ll m$  свет, излучаемый веществом при аккреции, поглощается черной дырой так, что  $a \rightarrow m$ . Однако, если  $a$  почти равно  $m$ , то момент отбирается. Устойчивое значение  $a = 0,948m$ .

Пенроуз показал, что есть возможность извлекать энергию из поля Керра. Бросим частицу так, чтобы она в эргосфере ( $r_{\text{гор}} \leq r \leq r_{\text{ш}}$ ) распадалась на две частицы. Пусть одна из новых частиц уйдет под горизонт, а вторая вылетит из под  $r_{\text{ш}}$  (рис. 62). Можно осуществить этот процесс так, что вернувшаяся частица принесет энергии больше, чем отправленная. Ясно, что при этом уменьшается энергия центрального тела.

Возникает задача: сколько энергии можно отнять у черной дыры? Хокинг показал, что есть некоторая инвариантная масса, которую процессами такого рода нельзя уменьшить. В метрике Шварцшильда площадь сферы  $r = r_g$  равна

$$S = 4\pi r_g^2 = 16\pi m^2.$$

В метрике Керра можно подсчитать площадь горизонта событий:

$$S = \int \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi(r_{\text{гор}} + a^2) = 4\pi[(m + (m^2 - a^2)^{1/2})^2 + a^2] = 8\pi m[m + (m^2 - a^2)^{1/2}].$$

Теорема Хокинга состоит в том, что  $S$  не может уменьшаться. Это позволяет определить инвариантную массу черной дыры

$$S \equiv 16\pi m_{\text{inv}}^2.$$

Подобные исследования показали, что при очень общих предположениях единственным точным осесимметричным решением с отсутствием сингулярности на горизонте событий является решение Керра. Можно показать, что при коллапсе под  $r_{\text{гор}}$  любого вращающегося тела метрика Керра возникает как предельная при  $t \rightarrow \infty$  для всей области вне  $r_{\text{гор}}$ . Все это позволяет считать, что метрика Керра описывает поле любой вращающейся черной дыры. Отметим, что реальная черная дыра должна иметь момент вращения

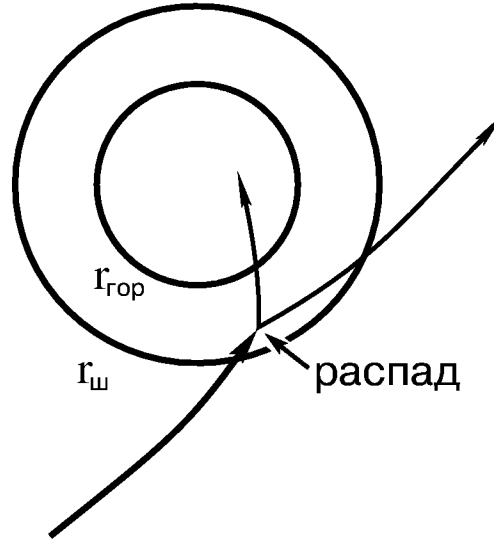


Рис. 62:

$a$  скорее ближе к  $a = m$ , чем к  $a = 0$ . В размерных единицах  $a = m$  соответствует моменту  $K = GM^2/c$ . Для  $M = 1 M_\odot$  это дает значение порядка момента вращения Солнца. Но Солнце — это очень медленно вращающаяся звезда. У массивных звезд удельный момент вращения может быть на два порядка больше.

## Глава 10. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

### § 10.1. Пульсары

Первые наблюдательные сведения о пульсарах были получены по их импульсному строго периодическому излучению. Для первого открытого пульсара CP 1919 период следования импульсов составлял 1,33 с. Сейчас известно около 150 пульсаров с периодами от 0,03 с до 3,8 с, причем точность определения периода составляет  $10^{-8}$ – $10^{-9}$ . Первые же наблюдения пульсаров на различных частотах обнаружили сдвиг по частоте времени прихода отдельных импульсов (рис. 63). Строгая периодичность и наблюдаемый сдвиг были настолько впечатляющими, что вначале эти сигналы приписывали деятельности разумных существ (little green men — определение, данное открывателями пульсаров). Но с увеличением числа наблюдаемых пульсаров и особенно с открытием пульсара в Крабовидной туманности, где после грандиозного взрыва Сверхновой 1054 всякая разумная жизнь была похоронена, гипотеза интеллектуальной деятельности была отброшена.

Эффект запаздывания сигналов легко объясняется распространением радиоволн в плазме. При наличии в межзвездной среде свободных электронов групповая скорость распространения становится равной

$$c' = c \sqrt{1 - (\nu_0/\nu)^2},$$

где  $\nu_0 = (4\pi n e^2/m_e)^{1/2}$  — собственная частота колебаний электронов в плазме (ленгмюровская частота). Полное время запаздывания прихода сигнала для первого пульсара оказалось около 80 с. Как видно, обсуждаемый эффект пропорционален полному числу электронов на луче зрения.

Физически запаздывание объясняется интерференцией бегущей и рассеянной волн. Благодаря этому эффекту пульсары позволили уточнить среднюю концентрацию электронов в Галактике:  $n_e \simeq 0,05 - 0,1 \text{ см}^{-3}$ .

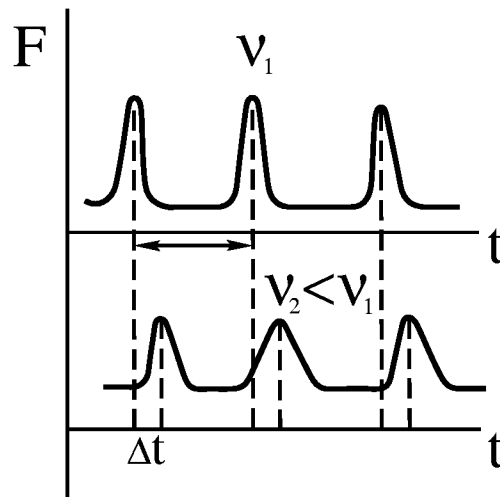


Рис. 63: