В кабине космонавта имеет место невесомость, сила тяготения не ощущается! Подчеркнем, что это происходит не за счет зависимости $1/r^2$ в формуле тяготения. Если космический корабль летит на высоте 300 км от поверхности Земли, значит, его расстояние от центра Земли 6700 км (радиус 6400 км), величина $1/r^2$ уменьшилась всего на 9—10 % по сравнению с ее значением на поверхности. Между тем, невесомость в кабине полная, сила тяготения внутри космического корабля выключается на все 100 % и происходит это вследствие того, что сам корабль летит по орбите с ускорением.

Эти очень простые соображения оказались существенными при развитии теории тяготения. Не относитесь с презрением к «простым» соображениям. Высшей похвалы заслуживают именно те исследователи, которые из простых, но твердо установленных фактов извлекают глубокие выводы.

Гравитационное поле — теория Ньютона

Подытожим сказанное выше о законе всемирного тяготения. Обратим внимание прежде всего на то, что он формулируется в терминах дальнодействия и притом мгновенного. Сила, действующая на 1-е тело в данный момент времени t_0, зависит от массы и положения 2-го тела в тот же момент t_0. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия отрицательна в соответствии с тем, что всегда имеет место притяжение. Можно ввести *гравитационный потенциал* и *гравитационное поле* данной массы. При этом окажется, что потенциал и поле в любой точке в данный момент определяются массой и ее положением в тот же момент. Налицо резкий контраст или, даже сильнее, несовместимость между электромагнитной теорией и теорией тяготения.

Электромагнитная теория характеризуется определенной скоростью распространения поля — скоростью света c. Созданная в 1905 г. теория относительности объявляет скорость c предельной и делает вывод о том, что пространство и время связаны друг с другом не так, как думали до начала XX в.

При переходе в движущуюся систему координат меняется течение времени, меняются длины, меняется понятие одновременности.

Между тем, теория Ньютона оперирует старыми, галилеевыми (или даже аристотелевыми) понятиями об отдельно существующих времени и пространстве.

После 1905 г. необходимость усовершенствования закона тяготения стала очевидной. Задачу эту решил Эйнштейн ценой 10 лет необычайно упорного и целеустремленного труда. При этом он избрал путь, внешне совершенно не похожий на теорию Максвелла. Эйнштейна вдохновляли два самых общих свойства тяготения. Первое — в свободно падающей кабине лифта имеет место невесомость. Другими словами: есть система координат, в которой силы тяжести или, иными словам, поле тяготения, как бы исчезает. Обратите внимание на то, что в теории Максвелла магнитное и электрическое поля преобразуются одно в другое, но не исчезают!

Эйнштейн сделал вывод, что можно построить такую теорию, в которой поле тяготения как таковое вообще не существует.

Тесно связанное с первым второе свойство состоит в том, что при наличии тяготения все самые разные по составу и массе тела могут двигаться по одной и той же траектории. Это свойство также отличается от движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях — такие частицы движутся по разным траекториям в зависимости от отношения заряда к массе.

Между тем, движение частиц под действием тяготения больше всего напоминает их движение в свободном пространстве, без каких-либо сил. В этих условиях любое тело движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathrm{const}$; $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$ есть решение уравнений движения *любого* тела.

При наличии тяготения движение более сложное, но одинаковость закона движения разных тел сохраняется (разумеется, при отсутствии других сил).

Снова мы видим сходство между свободным движением и движением в поле тяготения. Снова Природа намекает на возможность не вводить поле тяготения как таковое.

Эйнштейн предложил неожиданное замечательное решение: он предложил рассматривать неплоский искривленный комплекс пространства и времени.

Идея возможности (в смысле логической непротиворечивости) искривленного трехмерного пространства восходит еще к Лобачевскому, Больяи и Риману.

Для двумерного многообразия идея кривизны элемен-

Рис. 30. Параллельный перенос вектора $\mathbf{r}$ по прямой из точки A в точку B

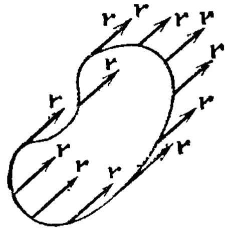

Рис. 31. Параллельный перенос вектора $\mathbf{r}$ по замкнутому контуру на плоскости

тарна. Плоскость представляет собой пример двумерного многообразия. Очевидно, что на плоскости можно взять двумерный вектор; понятие параллельного переноса вектора также наглядно. Передвигаясь по направлению вектора и перенося этот вектор параллельно ему самому, мы начертим на плоскости прямую (рис. 30). Прямая является линией, соединяющей две точки по кратчайшему расстоянию. Далее, на плоскости можно параллельно переносить вектор вдоль замкнутой кривой (рис. 31). В исходную точку он вернется с тем же направлением, с которым вышел. Отсюда следует, в частности, что сумма углов треугольника равна $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (рис. 32).

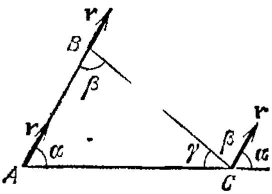

Рис. 32. Сохранение направления вектора $\mathbf{r}$ при параллельном переносе по замкнутому контуру тесно связано с тем, что сумма углов треугольника на плоскости равна π. Вектор $\mathbf{r}$, перенесенный в вершину C, вершину A и вершину B треугольника ABC, имеет одно и то же направление, поскольку $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Читатель может удивиться, с какой стати полстраницы посвящены самым общеизвестным фактам? Но это лишь педагогический прием, который нужен для того, чтобы оттенить далеко не элементарные вещи. Мы повторили свойства *плоского* двумерного многообразия. Но двумерное многообразие может быть и искривленным, не плоским. Представить себе искривленное двумерное многообразие (кратко $2D$) просто: возьмем искривленную $2D$-поверхность в нашем плоском трехмерном пространстве, в котором мы обитаем (о времени t временно забудем). Простейший пример — поверхность шара (рис. 33) или эллипсоида. Снова можно найти линии, соединяющие кратчайшими путями заданную пару точек на поверхности. При

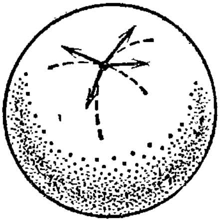

Рис. 33. Пример вектора на кривой поверхности — векторы, касательные к сфере

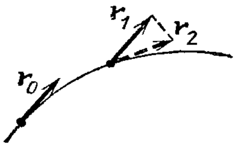

Рис. 34. При параллельном переносе на искривленной поверхности направление вектора меняется

этом отрываться от поверхности в другие точки трехмерного пространства запрещено — ведь речь идет именно о линиях, целиком лежащих (нарисованных) на поверхности.

Такие кратчайшие линии называются *геодезическими*. Именно по этим линиям муравьи, ползающие по поверхности, прокладывают свои дороги. Геодезические на кривой поверхности играют ту же роль, что прямые на плоскости. Можно определить и понятие двумерного вектора на искривленной (тоже двумерной) поверхности и далее — понятие параллельного переноса вектора из одной точки в другую. Для определения этого действия произведен параллельный перенос в привычном нам плоском трехмерном пространстве (рис. 34). При этом двумерный вектор $\mathbf{r}_0$ отклонится от поверхности ($\mathbf{r}_1$), но мы его спроектируем на поверхность ($\mathbf{r}_2$), снова сделаем касательным к поверхности. Производя параллельный перенос вдоль заданной линии многими мелкими шагами, получим результат, в пределе не зависящий от числа шагов и совпадающий с тем, что было получено из условия сохранения угла с геодезической. Однако можно поступить иначе и определить параллельный перенос из условия, что перемещение из одной точки в другую совершается по геодезической и угол между вектором и геодезической остается постоянным. При этом не придется выходить в трехмерное пространство, уходить с рассматриваемой двумерной поверхности.

Эти достаточно простые упражнения в стереометрии (геометрии в трехмерном пространстве) приводят к принципиально новым результатам для геометрии двумерной поверхности.

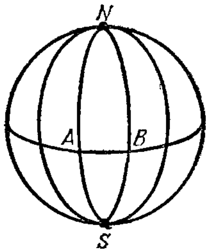

Рис. 35. Сумма углов треугольника на сфере больше, чем π. В треугольнике ANB сторона AB — дуга экватора, а стороны AN и BN — дуги меридиана, пересекающие экватор под прямым углом, поэтому сумма углов в таком треугольнике превышает π на величину угла ANB

Возьмем для примера сферическую поверхность. Меридианы являются геодезическими (рис. 35). Два меридиана, вышедшие из одной точки — например, с северного полюса — снова пересекаются на южном полюсе. На плоскости такого не бывало!

Все точки шара обладают одинаковыми свойствами. Поэтому из любой точки можно во все стороны выпустить геодезические. Заметим, однако, что на земном шаре через Москву легко провести две геодезические — меридианы на юг и на север. Параллели геодезическими не являются. Единственным исключением является экватор.

Исследуя параллельный перенос вектора (в каждой точке двумерного, касающегося поверхности Земли), можно обнаружить, что после обхода замкнутого контура вектор поворачивается!

Это совершенно новое явление, с которым мы не встречались в случае вектора и контура на плоскости. Угол α поворота вектора пропорционален площади контура. В частности, для сферы

$$\alpha = S/R^2,$$

где R — радиус сферы, S — площадь ее поверхности.

Отсюда следует, что изменится и сумма углов треугольника Σ. Поскольку роль прямых на сфере играют геодезические, мы говорим о треугольнике, в котором три точки (три вершины) соединены тремя геодезическими линиями

$$\Sigma = \pi + S/R^2,$$

где S — площадь треугольника.

Проверьте это равенство на треугольнике с одной вершиной на полюсе (N) и двумя на экваторе (A, B) (рис. 35). Его стороны — два меридиана и отрезок экватора.

Таким образом, геометрия кривой поверхности зависит от величины K, которую называют *гауссовой кривизной*.

Величина R^2, т. е. отношение площади к углу поворота вектора, не обязана быть постоянной на всей поверхности — она меняется от точки к точке в случае поверхности сложной формы. В этом случае можно записать

$$\alpha = S \cdot K(x_1, x_2),$$

где x_1 и x_2 — координаты на поверхности; S мало, так что и α мало. Коэффициент K не обязан быть положительным: там, где поверхность в трехмерном пространстве изогнута как седло, K отрицателен. Принципиально важно, что эту величину можно определить путем переноса вектора и измерений углов и площадей на двумерной поверхности. Мы не нуждаемся в представлении о плоском трехмерном пространстве, в котором находится двумерная поверхность. Именно этот урок открывает путь к дальнейшим обобщениям.

Можно изучать трехмерное искривленное пространство, хотя мы и не можем представить себе такое пространство наглядно, не можем заказать в мастерской кусок такого пространства.

При переходе от двумерного многообразия к высшим размерностям определение геодезической остается без изменений. Новый момент появляется при определении поворота вектора при параллельном его переносе по замкнутому контуру. Результат переноса зависит от того, как был выбран контур двумерного пространства, но и вектор, и контур всегда лежат на данной поверхности и остается только условиться о том, что знак S, например, положителен при обходе по часовой стрелке и отрицателен в противоположном случае, а также договориться о знаке угла поворота вектора. Уже в трехмерном пространстве контур можно наклонить по-разному. Результат зависит и от начального наклона переносимого вектора; результат поворота выражается как малый вектор, перпендикулярный исходному (это условие следует из того, что длина вектора при переносе не меняется). Однако условие перпендикулярности малого вектора исходному единичному еще не определяет полностью этот малый вектор. Поэтому кривизна трехмерного пространства выражается не одной функцией точки $K(x_1, x_2)$, а несколькими.

После создания теории относительности пространство и время объединились в один комплекс. Этот комплекс плоский, но его геометрия сложнее четырехмерного евклидова пространства с координатами x, y, z, w. Роль длины в четырехмерном евклидовом пространстве играет величина

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Но в теории относительности «*интервал*» — инвариантная величина типа длины — дается выражением

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

где c — скорость света. Такое 4-мерное пространство называется *плоским псевдоевклидовым* *).

Общая теория относительности «в ореховой скорлупе» состоит в том, что рассматривается *искривленное псевдоевклидово* пространство.

Физика искривленного псевдоевклидова пространства

Эйнштейн выдвинул предположение, что в искривленном пространстве-времени любые частицы движутся по геодезическим этого пространства-времени.

Если пространство плоское, его геодезические — это прямые линии, а прямые в псевдоевклидовом пространстве соответствуют движению с постоянной скоростью по трехмерной прямой траектории, т. е. инерциальному движению.

Предположение о геодезических сразу отвечает на вопрос о том, почему различные тела движутся по одним и тем же траекториям. Раньше мы сказали бы

*) «Псевдо» в переводе с латыни означает «якобы», т. е. «тот, да не тот», пространство хоть и похоже на евклидово, «но» существенно отличается от евклидова знаком одного слагаемого ($-c^2t^2$ вместо w^2).