МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Предлагаемое дополнение не может и не должно заменять учебники. Определения даны грубо, с единственной целью дать возможность понимать основной текст тем, кто кончал среднюю школу до ее реформы.

Векторы

Величина, характеризуемая числовым значением (модулем) и направлением, называется *вектором* (3-вектором). Векторы можно представлять себе как направленные отрезки — стрелки. Длина отрезка характеризует абсолютную величину вектора — числовое значение величины. Направление стрелки дает направление рассматриваемой векторной величины (рис. П.1). Перемещение, скорость, ускорение, сила, плотность тока, напряженности электрического и магнитного полей — примеры векторов. Величина, характеризуемая только числовым значением и не имеющая направления в пространстве, называется *скаляром* (3-скаляром). Масса, заряд, температура, энергия — примеры пространственных скаляров.

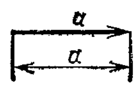


Рис. П.1. Вектор **a** изображается стрелочкой длиной $a = |\mathbf{a}|$, а направление стрелочки определяет направление вектора

Если имеется несколько векторов (например, несколько сил, действующих на тело в разных направлениях), то их сумма (например, результирующая сила, действующая на тело) определяется по правилу *сложения векторов* (рис. П.2): к концу первой стрелки надо приложить начало второй стрелки, сохраняя ее направление, затем к концу второй стрелки приложить начало третьей стрелки (сохраняя ее направление) и т. д. Соединяя стрелкой начало первой стрелки с концом последней, получаем вектор суммы. Легко убедиться в том, что вектор суммы получается одним и тем же независимо от того, с какого из векторов мы начнем и

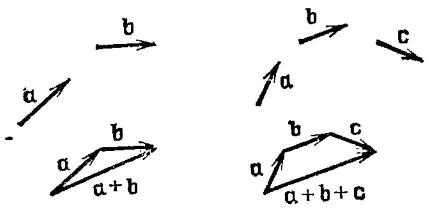
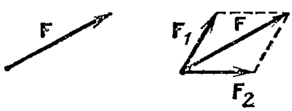


Рис. П.2. Правило сложения векторов

независимо от того, в каком порядке мы будем присоединять стрелки. Для двух векторов правило сложения векторов сводится к хорошо известному правилу параллелограмма сил — результирующая сила совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах рассматриваемых сил.



$$F = F_1 + F_2$$

Рис. П.3. Каждый вектор **F** можно разложить на составляющие. Составляющие $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ складываются в вектор **F** по правилу сложения векторов

Умножить вектор на положительное число значит умножить на это число его абсолютную величину (длину стрелки), оставив направление вектора неизменным. Умножение вектора на отрицательное число означает умножение абсолютной величины вектора на абсолютную величину (модуль) отрицательного числа и замену направления вектора на противоположное. Вводят и нулевой вектор — результат умножения любого вектора на нуль — его длина равна нулю, а направление произвольно.

Векторную величину можно описать и по-другому. Всякий вектор можно представить по правилам сложения в виде суммы двух или нескольких других векторов — разложить на *составляющие* (рис. П.3). Определим в пространстве длину, ширину и высоту. Выбор направлений в длину, в ширину и в высоту означает выбор направлений осей координат. Тем самым мы ввели *систему координат*. Найдем проекции вектора на эти оси (рис. П.4, *а*). Если направление проекции совпадает с направлением оси, то проекция имеет знак «плюс». Если направление проекции и оси противоположны, то проекция имеет знак «минус». Вектор может лежать в плоскости двух осей, тогда его проекция на третью ось будет равна нулю. Таким образом, любой вектор $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль

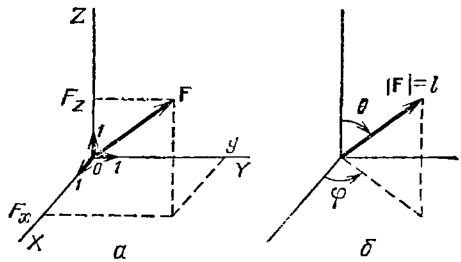


Рис. П.4. Различные способы задания векторов. *а* — вектор $\mathbf{F}$ задается тройкой проекций F_x, F_y и F_z на оси координат X, Y, Z. *б* — вектор задается его длиной $|\mathbf{F}| = l$, азимутальным φ и полярным θ углами, фиксирующими его направление в пространстве

осей X, Y, Z, а F_x, F_y, F_z — тройка проекций вектора $\mathbf{F}$ на эти оси.

В таком описании вектор определяется тройкой чисел — тройкой F_x, F_y, F_z его проекций на оси координат. Но ведь мы можем изменить выбор системы координат — повернуть ее, сдвинуть ее начало, изменить единицы измерения длины проекций. Тогда изменятся и проекции вектора на оси. Преобразование системы координат вызывает преобразование проекций векторной величины. Сам вектор — стрелка — при таких преобразованиях не изменился, изменилась система координат, в которой мы его описываем. По данной стрелке мы можем определить проекции вектора при любом выборе системы координат. Но можно поступить и наоборот — в данной системе координат ввести тройку чисел (тройку проекций) и задать закон их изменения при координатных преобразованиях *).

*) Зависимость тройки чисел, описывающих вектор, от выбора системы координат является важнейшим фактом. Можно задать тройку скаляров, например, температуру, давление и плотность. Преобразование пространственных координат не изменит ни одну из этих величин. Это и есть фундаментальное отличие числа — скаляра — например, температуры, от числа — проекции вектора на ось, например, проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на ось X, v_x.

Это другое описание вектора. Описание вектора стрелками очень наглядно. Описание вектора набором чисел оказывается очень полезным для различных обобщений понятия вектора, которые встречаются при описании зарядов и токов элементарных частиц. Векторная величина может быть функцией времени и пространства. Это означает, что с каждым моментом времени и с каждой точкой пространства связана своя стрелка, или своя тройка чисел с определенным законом изменения при координатных преобразованиях.

Этот закон определяет систему соотношений, связывающих компоненты вектора **a** в одной системе координат $a_x(1)$, $a_y(1)$, $a_z(1)$ с компонентами этого вектора $a_x(2)$, $a_y(2)$, $a_z(2)$ в некоторой другой системе координат:

$$\begin{aligned} a_x(2) &= T_{xx}a_x(1) + T_{xy}a_y(1) + T_{xz}a_z(1), \\ a_y(2) &= T_{yx}a_x(1) + T_{yy}a_y(1) + T_{yz}a_z(1), \\ a_z(2) &= T_{zx}a_x(1) + T_{zy}a_y(1) + T_{zz}a_z(1). \end{aligned}$$

Девятка коэффициентов $T_{xx}, \ldots, T_{zz}$ при преобразованиях системы координат в свою очередь также изменяется по определенному закону и составляет тензор (см. ниже).

При всевозможных поворотах и сдвигах системы координат длина вектора $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ не меняется. Величина, которая зависит от преобразуемых величин и не меняется при преобразованиях, является скаляром относительно рассматриваемых преобразований. Длина вектора — скаляр относительно преобразований координат, не меняющих единицы измерения длины проекций.

Рассмотрим вектор единичной длины, начало которого совпадает с началом координат. Тогда конец этого вектора находится на сфере единичного радиуса. Каждая точка этой сферы отвечает определенному направлению единичного вектора в пространстве. Чтобы определить это направление, необходимо задать на сфере два угла — азимутальный φ и полярный θ (рис. П.4, *б*). Тем самым вектор единичной длины задается двумя углами. Произвольный вектор может быть задан его длиной l и двумя углами на сфере радиуса l.

Это еще один способ определения вектора — в сферической системе координат (см. рис. П.4, *б*). С другой стороны, можно определить положение любой точки с помощью радиус-вектора, начало которого совпадает с началом координат, а конец совпадает с данной точкой.

Скалярное произведение

Чтобы помножить два числа, мы используем таблицу умножения — правило, по которому этим двум числам сопоставляется некоторое третье число — их произведение. Скалярное умножение двух векторов определяется правилом, по которому этим векторам сопоставляется некоторый скаляр — некоторое число — их скалярное произведение.

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принято обозначать $\mathbf{ab}$, или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, или $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Задаваясь абсолютной величиной и направлением в пространстве двух векторов, можно определить их скалярное произведение как произведение абсолютных величин двух векторов и косинуса угла между их направлениями.

Например, пусть F — абсолютная величина вектора силы $\mathbf{F}$, r — абсолютная величина вектора перемещения $\mathbf{r}$ и θ — угол направления действия силы и перемещения. Скалярное произведение векторов силы $\mathbf{F}$ и перемещения $\mathbf{r}$ есть величина работы силы $A = \mathbf{Fr} = Fr\cos\theta$.

Легко видеть, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно определить как произведение длины вектора $\mathbf{a}$ и проекции $\mathbf{b}$ на направление $\mathbf{a}$, т. е. ab_a, или как произведение длины $\mathbf{b}$ и длины проекции вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$, т. е. ba_b. Так, работа силы $\mathbf{F}$ при перемещении $\mathbf{r}$ равна произведению модуля силы F и проекции перемещения на направление действия силы $\mathbf{F}$:

$$A = Fr_{\mathbf{F}},$$

и эта же работа равна произведению величины перемещения r и величины проекции силы F на направление перемещения: $A = F_r r$.

Наконец, если мы выбрали прямоугольную систему координат (оси координат направлены под прямым углом друг к другу) и определили наши векторы по