в каждой точке пространства зависит именно от точки пространства, а не от способов описания положения этой точки или выбора системы координат.

Рассмотрим в данный момент $t=t_0$ скалярное поле $u(M, t_0)=u(x, y, z, t_0)$ (т. е. функция u — скаляр). В каждой точке пространства M с координатами x, y, z поле характеризуется величиной $u(M)=u(x, y, z)$. Зададимся вопросом о том, как меняется эта величина от точки к точке. Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется привлечь несколько математических понятий, описывающих различные изменения физических величин.

Градиент скалярного поля

Рассмотрим определенную во всех точках пространства скалярную величину. Если эта величина одинакова во всех точках пространства, то мы имеем *однородное скалярное поле* этой величины. Если значения рассматриваемой величины в разных точках пространства неодинаковы, то ее поле неоднородно. Как же охарактеризовать неоднородность поля? Рассмотрим конкретный пример скалярного поля.

Мы видели, что во всех точках пространства, окружающего неподвижный электрический заряд, можно определить скалярную величину — электрический потенциал. Поэтому можно говорить о скалярном поле электрического потенциала. Рассмотрим неподвижный электрический заряд. На разных расстояниях от заряда потенциал имеет различные значения. Поле электрического потенциала точечного заряда — неоднородное. Величина потенциала меняется с расстоянием от заряда. Поле неподвижного заряда со временем не меняется. Это поле — стационарное. Поэтому поле электрического потенциала неподвижного точечного заряда — пример неоднородного стационарного скалярного поля.

Потенциал неподвижного точечного заряда зависит только от расстояния до такого заряда. Поэтому на сфере, окружающей точечный заряд (с центром сферы, совпадающим с положением заряда), потенциал имеет одно и то же значение. Такая сфера — пример поверхности одинакового потенциала — *эквипотенциальной поверхности.*

Ясно, что неоднородности потенциала тем больше, чем больше изменение потенциала на заданном расстоянии между двумя точками. Возникает простая аналогия с движением тела. Мы движемся тем быстрее, чем большее расстояние мы проходим за заданный промежуток времени. Количественно движение характеризуется скоростью — перемещением за единицу времени. Естественно ввести подобную характеристику и для поля электрического потенциала — некоторую «скорость изменения величины потенциала с расстоянием». Эту «скорость» естественно определить как отношение разности значений потенциала в двух рассматриваемых точках к расстоянию между этими точками, скажем, как разность потенциалов на единичном расстоянии. Но ведь при неравномерном движении перемещение за единицу времени — скорость движения — зависит от времени, и, говоря о скорости, надо уточнить, какой именно момент времени нас интересует. Нечто подобное возникает и в случае неоднородного поля — в разных местах разность потенциалов точек, находящихся на единичном расстоянии, может быть различной. Поэтому надо уточнить, в каком именно месте и в каком именно направлении в данном месте нас интересует скорость изменения потенциала. В кинематике неравномерное движение характеризуется мгновенной скоростью — скоростью в данный момент времени. Аналогично мы можем ввести некоторую «местную скорость пространственного изменения потенциала» — скорость такого изменения в окрестности данной точки. Ясно, что эта скорость будет определена тем точнее, чем меньшую окрестность точки мы выберем. Разовьем дальше нашу аналогию с движением тела. Вспомним, что скорость — величина векторная. Она имеет направление в пространстве, совпадающее с направлением перемещения. Ясно, что и наша «пространственная скорость изменения потенциала» тоже зависит от направления в пространстве. Действительно, выберем некоторую точку M с потенциалом $\varphi(M)$ и рассмотрим точки A, B, C, $\ldots$, лежащие на сфере малого радиуса r с центром в точке M. В неоднородном поле потенциал этих точек неодинаков, поэтому и величина разности потенциалов $\varphi(A)-\varphi(M)$ не равна $\varphi(B)-\varphi(M)$ или $\varphi(C)-\varphi(M)$. При этом расстояние от точки M до точек A, B, C, $\ldots$ одно и то же, r, так что мы получаем разную величину скорости изменения потенциала в разных направлениях: в направлении MA эта скорость есть $\frac{1}{r}[\varphi(A)-\varphi(M)]$, в направлении MB (рис. П.10, *а*): $\frac{1}{r}[\varphi(B)-\varphi(M)]$ и т. п.

Определим местную скорость пространственного изменения потенциала вдоль одного из направлений, например, вдоль направления l из точки M в точку A.

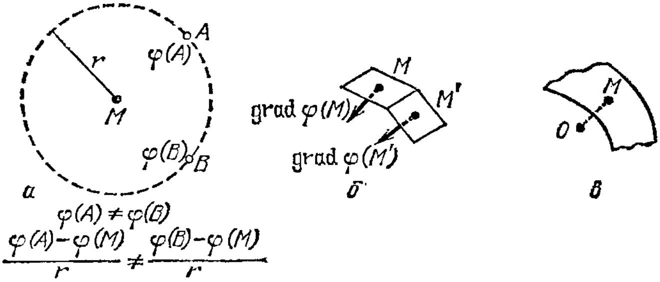

Рис. П.10. Неоднородное потенциальное поле: *а* — пространственная скорость изменения потенциала в разных направлениях разная; *б* — скорость изменения потенциала максимальна при минимальной величине r; *в* — эквипотенциальная поверхность; в каждой ее точке вектор градиента направлен по нормали к этой поверхности

Для этого рассмотрим предел отношения разности потенциалов к расстоянию между точками M и A при стремлении величины r к нулю. Этот предел представляет собой пространственную производную потенциала φ в направлении l:

$$\frac{d\varphi}{dl}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[\varphi(A)-\varphi(M)].$$

Понятие *производной вдоль данного направления инвариантно*, оно определяется независимо от выбора системы координат. В разных направлениях величина этой производной различна. Есть направление, вдоль которого производная максимальна, есть направления, вдоль которых она равна нулю, или же она принимает некие промежуточные значения.

Равенство производной нулю означает, что потенциал в этом направлении не меняется. Рассматривая малую окрестность точки M, мы получаем, что эти направления определяют малую площадочку, на которой величина потенциала $\varphi=\varphi(M)$. Для близлежащей точки A, в которой $\varphi(A) \neq \varphi(M)$, также существует окружающая ее площадочка $\varphi = \varphi(A) \neq \varphi(M)$. Если точка A находится в очень малой окрестности точки M, то эта площадочка будет параллельна площадочке с $\varphi = \varphi(M)$.

Будем перемещать точку O по площадочке с $\varphi = \varphi(A)$, так что всегда $\varphi(O) = \varphi(A)$. При этом расстояние r от точки O до точки M будет меняться, а величина $\varphi(O) - \varphi(M)$ остается неизменной.

Из геометрических соображений (рис. П.10, *б*) ясно, что отношение $[\varphi(O) - \varphi(M)]/r$ будет максимальным при минимальной величине r, т. е. когда точка O лежит на перпендикуляре к площадочке $\varphi = \varphi(M)$. При стремлении r к нулю мы получаем производную $d\varphi/dl$, которая максимальна в направлении, перпендикулярном площадочке $\varphi = \varphi(M)$.

«Склеивая» малые площадочки с $\varphi = \varphi(M)$, мы получаем поверхность одинакового потенциала — *эквипотенциальную поверхность* (рис. П.10, *в*). В любой точке этой поверхности производная максимальна в направлении нормали к этой поверхности.

Выберем ортогональную (декартову) систему координат XYZ. В этой системе точка M имеет координаты x, y, z. Точка A смещена относительно точки M в направлении l на малое расстояние (которое мы в пределе устремляем к нулю). Поэтому вдоль оси X она смещена относительно точки M на величину Δx проекции на ось X смещения $\mathbf{r}$ в направлении l, вдоль оси Y на величину Δy проекции этого смещения на ось Y и вдоль оси Z на соответствующую проекцию Δz на ось Z.

Получаем, что координаты точки A, отличающиеся от координат точки M на малую величину этих проекций, оказываются равными $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ и $z + \Delta z$. Чтобы определить в этой системе координат местную скорость пространственного изменения потенциала, мы должны найти зависимость разности потенциалов точек A и M от координат x, y и z. Потенциал есть функция трех независимых аргументов — координат x, y и z. Потенциал точки M равен значению этой функции при значениях ее аргументов x, y и z, а потенциал точки A равен соответствующему значению при $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ и $z + \Delta z$:

$$\varphi(A) = \varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z).$$

Теперь мы должны определить разность потенциалов $\varphi(A)-\varphi(M)$.

Покажем, что эта разность состоит из трех частей, пропорциональных соответственно Δx, Δy и Δz, так что

$$\varphi(A)-\varphi(M)=\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\varphi(x,\ y,\ z)= \\ =\varphi_{,x}\Delta x+\varphi_{,y}\Delta y+\varphi_{,z}\Delta z.$$

Поскольку Δx, Δy и Δz очень малы (это проекции малого смещения $\mathbf{r}$ на оси координат), мы здесь пренебрегаем членами более высокого порядка малости: $\Delta x\cdot\Delta y$, $\Delta x\cdot\Delta z$, $\Delta y\cdot\Delta z$, $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$, $(\Delta z)^2$. Величины $\varphi_{,x}$, $\varphi_{,y}$ и $\varphi_{,z}$ определяются так:

$$\varphi_{,x}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{y,z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\varphi(x,\ y,\ z)}{\Delta x},$$

$$\varphi_{,y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{x,z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(x,\ y+\Delta y,\ z)-\varphi(x,\ y,\ z)}{\Delta y},$$

$$\varphi_{,z}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{x,y}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varphi(x,\ y,\ z+\Delta z)-\varphi(x,\ y,\ z)}{\Delta z}.$$

Рассмотрим, например, величину $\varphi_{,x}$. Она определена как предел отношения $\frac{1}{\Delta x}\{\varphi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\varphi(x,y,z)\}$ при $\Delta x\to 0$ — это производная $\varphi(x,y,z)$ по x. Но это не совсем обычная производная. Она получена в предположении, что y и z постоянны.

Такая производная называется *частной производной* функции $\varphi(x,\ y,\ z)$ по x при постоянных y и z.

Аналогично величина $\varphi_{,y}$ называется частной производной функции $\varphi(x,\ y,\ z)$ по y при фиксированных x и z, а величина $\varphi_{,z}$ — частной производной $\varphi(x,y,z)$ по z при фиксированных x и y. Частные производные потенциала являются компонентами *вектора градиента потенциала* $\operatorname{grad}\varphi$.

Итак, мы связали изменения потенциала с некоторым вектором — вектором градиента потенциала, определяемым пространственными (частными) производными потенциала. Этот вектор можно определить в любой точке пространства, в которой определена скалярная величина — потенциал этой точки. Значит, со скалярным электрическим потенциалом связано поле векторной величины. Что же это за величина? Рассмотрим две близлежащие точки A и M. *Разность потенциалов* есть работа электрической силы при перемещении пробного малого заряда, отнесенная к величине этого заряда. Эта работа равна скалярному произведению вектора перемещения **r** из точки M в точку A и вектора электрической напряженности (электрической силы, действующей на пробный заряд) $\mathbf{E}(M)$:

$$\varphi(A) - \varphi(M) = (\mathbf{E}(M),\ \mathbf{r}).$$

С другой стороны, при очень малых расстояниях r между точками A и M разность потенциалов точек A и M есть проекция градиента потенциала на направление **r**, помноженная на малое расстояние r:

$$\varphi(A) - \varphi(M) = (\operatorname{grad} \varphi(M),\ \mathbf{r}),$$

т. е. разность потенциалов между точками A и M есть скалярное произведение вектора перемещения из точки M в точку A и вектора градиента потенциала.

Итак, мы установили связь между скалярной и векторной характеристиками пространства, окружающего электрический заряд. Скалярное поле электрического потенциала вполне определенным образом связано с векторным полем — полем его градиента.

Потенциальное силовое поле. Работа электрической силы

Теперь рассмотрим связь скалярного потенциала и вектора его градиента с другой стороны. Пусть в каждой точке пространства определена некоторая векторная величина. Тем самым задано векторное поле этой величины. Реальным примером такой величины является сила, с которой действует электрический заряд на пробный заряд, помещенный в любую точку пространства. В каждой точке пространства может быть определен вектор этой силы. Тем самым задается поле электрической силы. Как установить, связано ли с этим полем скалярное поле электрического потенциала? Анализ работы по замкнутому контуру приведет нас сейчас к важной характеристике пространственного изменения векторного поля. С ее помощью можно установить, связано ли с этим полем соответствующее скалярное поле потенциала.

Пусть мы переместили заряд из точки A в точку B (рис. П.11) по пути a и обратно из B в A по пути b. Это перемещение в действительности складывается из последовательности малых перемещений: сначала мы