перемещении пробного малого заряда, отнесенная к величине этого заряда. Эта работа равна скалярному произведению вектора перемещения $\mathbf{r}$ из точки M в точку A и вектора электрической напряженности (электрической силы, действующей на пробный заряд) $\mathbf{E}(M)$:

$$\varphi(A) - \varphi(M) = (\mathbf{E}(M),\ \mathbf{r}).$$

С другой стороны, при очень малых расстояниях r между точками A и M разность потенциалов точек A и M есть проекция градиента потенциала на направление $\mathbf{r}$, помноженная на малое расстояние r:

$$\varphi(A) - \varphi(M) = (\operatorname{grad} \varphi(M),\ \mathbf{r}),$$

т. е. разность потенциалов между точками A и M есть скалярное произведение вектора перемещения из точки M в точку A и вектора градиента потенциала.

Итак, мы установили связь между скалярной и векторной характеристиками пространства, окружающего электрический заряд. Скалярное поле электрического потенциала вполне определенным образом связано с векторным полем — полем его градиента.

Потенциальное силовое поле. Работа электрической силы

Теперь рассмотрим связь скалярного потенциала и вектора его градиента с другой стороны. Пусть в каждой точке пространства определена некоторая векторная величина. Тем самым задано векторное поле этой величины. Реальным примером такой величины является сила, с которой действует электрический заряд на пробный заряд, помещенный в любую точку пространства. В каждой точке пространства может быть определен вектор этой силы. Тем самым задается поле электрической силы. Как установить, связано ли с этим полем скалярное поле электрического потенциала? Анализ работы по замкнутому контуру приведет нас сейчас к важной характеристике пространственного изменения векторного поля. С ее помощью можно установить, связано ли с этим полем соответствующее скалярное поле потенциала.

Пусть мы переместили заряд из точки A в точку B (рис. П.11) по пути a и обратно из B в A по пути b. Это перемещение в действительности складывается из последовательности малых перемещений: сначала мы переместили заряд из точки A в точку a_1, совершив малое перемещение $\mathbf{r}_1$, потом произвели перемещение $\mathbf{r}_2$ из точки a_1 в точку a_2, потом совершили перемещение $\mathbf{r}_3$ из точки a_2 в точку a_3 и так далее, пока наконец мы не совершим перемещение в точку B из близкой к ней точки a_n.

Если такие промежуточные перемещения достаточно малы, так что при каждом перемещении вектор электрической силы меняется слабо, то можно считать, что на каждом таком малом перемещении вектор электрической силы постоянен. При первом перемещении $\mathbf{r}_1$ заряда работу совершает сила $\mathbf{F}_1$, при втором $\mathbf{r}_2$ — сила $\mathbf{F}_2$ и так далее. Сумма работ на каждом малом перемещении составит полную работу электрической силы при рассматриваемом перемещении $\mathbf{r}$:

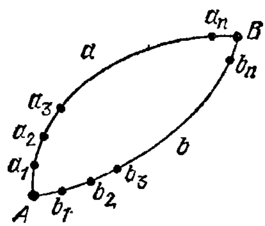

Рис. П.11. Работа по каждому пути (a и b) складывается из работ по перемещению заряда на малых их участках

$$A = \mathbf{F}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n\mathbf{r}_n.$$

На обратном пути заряд из B в A перемещается другим путем b (рис. П.11). На этом пути происходят малые перемещения в другие промежуточные точки: $b_n, \ldots, b_2, b_1$ и электрическая сила на каждом перемещении — из B в b_n, из b_2 в $b_1, \ldots$ имеет другую величину и другое направление, нежели при перемещениях из A в a_1, из a_1 в a_2 и т. д.

Подсчитаем работу электрической силы точечного заряда $+Q$ при перемещении пробного заряда $+q$ по замкнутому пути. На малых участках этого пути работа определяется скалярным произведением электрической силы (вектор которой на малых участках можно считать постоянным) и перемещения на этом участке. Поскольку электрическая сила направлена по радиусу, в скалярное произведение дает вклад только радиальная составляющая перемещения. Поэтому, вычисляя работу для малого перемещения, мы можем представить это перемещение как последовательность перемещений по окружности и по радиусу (рис. П.12).

Электрическая сила будет совершать работу только при перемещении вдоль радиуса и мы сейчас посчитаем работу при таком малом радиальном перемещении.

Рассмотрим малое перемещение из точки A в точку a_1, так что расстояние от точечного заряда до перемещаемого пробного заряда изменится на малую величину $a = r_{a_1} - r_A$, где r_A — расстояние до точки A, а r_{a_1} — до точки a_1. При малом радиальном перемещении от A до a_1 силу, действующую на пробный заряд, можно считать постоянной и равной некоторой силе, действующей на этом перемещении.

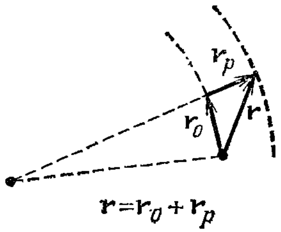

Рис. П.12. Малое перемещение $\mathbf{r}$ пробного заряда в окрестности точечного заряда складывается из перемещения по окружности $\mathbf{r}_0$ и перемещения по радиусу $\mathbf{r}_p$, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_p$

Как определить среднюю силу? Можно взять среднее арифметическое сил, действующих на расстоянии r_A и на расстоянии r_{a_1}:

$$F_{\text{а}} = \frac{1}{2}\left(\frac{Qq}{r_A^2} + \frac{Qq}{r_{a_1}^2}\right),$$

а можно — среднее геометрическое этих величин

$$F_{\text{г}} = \sqrt{\frac{Qq}{r_A^2} \cdot \frac{Qq}{r_{a_1}^2}} = \frac{Qq}{r_A r_{a_1}}.$$

Оказывается, как бы мы ни определяли среднюю силу, при $a \equiv r_{a_1} - r_A \ll r_A$ (или r_{a_1}) ответ будет одним и тем же. Чтобы в этом убедиться, можно использовать свойство малых величин: если x мало, т. е. $x \ll 1$, то

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x.$$

Задание. Используя эти приближенные соотношения, покажите, что

$$F \approx F_{\text{а}} \approx F_{\text{г}} \approx \frac{Qq}{r_A^2} - \frac{Qq}{r_A^3}a.$$

Работа при рассматриваемом радиальном перемещении составит

$$A = F \cdot a.$$

Мы выберем выражение для средней силы как среднее геометрическое $F = \dfrac{Qq}{r_A r_{a_1}}$ и используем соотношение $\frac{a}{r_A r_{a_1}}=\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{a_1}}$, тогда выражение для работы примет вид

$$A_1=Fa=\frac{Qq}{r_A r_{a_1}}a=Qq\frac{a}{r_A r_{a_1}}=Qq\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_{a_1}}\right)=$$

$$=\frac{Qq}{r_A}-\frac{Qq}{r_{a_1}}.$$

Точно так же вычисляется работа при малом перемещении из a_1 в a_2. Эта работа составит

$$A_2=\frac{Qq}{r_{a_1}}-\frac{Qq}{r_{a_2}}.$$

Точно такое же выражение с заменой r_{a_1} на r_{a_2} и r_{a_2} на r_{a_3} мы получим для работы при перемещении из a_2 в a_3 и так далее вплоть до последнего малого перемещения из точки a_n в точку B, при котором работа электрической силы составит

$$A_n=\frac{Qq}{r_{a_n}}-\frac{Qq}{r_B}.$$

Полная работа при перемещении пробного заряда из точки A в точку B по пути a складывается из суммы работ на всех малых перемещениях и составляет

$$A=A_1+A_2+\ldots+A_n=\frac{Qq}{r_A}-\frac{Qq}{r_{a_1}}+\frac{Qq}{r_{a_1}}-\frac{Qq}{r_{a_2}}+$$

$$+\frac{Qq}{r_{a_2}}-\ldots-\frac{Qq}{r_{a_n}}+\frac{Qq}{r_{a_n}}-\frac{Qq}{r_B}=\frac{Qq}{r_A}-\frac{Qq}{r_B}.$$

Итак, работа при перемещении пробного заряда из точки A в точку B зависит только от величины пробного заряда q, величины данного точечного заряда Q и от расстояний r_A и r_B до начальной A и конечной B точек перемещения.

Если мы повторим для перемещения из A в B по пути b все рассуждения, проведенные для пути a, мы получим тот же самый ответ. Получается, что работа электрической силы при перемещении пробного заряда вблизи точечного заряда не зависит от пути, по которому происходит перемещение. Это замечательное свойство электрической силы можно обобщить для любого перемещения вблизи заряженного тела любой формы, вблизи любой системы заряженных тел.

А сейчас мы установим одно интересное следствие независимости работы электрической силы от формы пути, по которому происходит перемещение пробного заряда.

Пусть мы сначала переместим пробный заряд из точки A в точку B по какому-то пути a, а потом переместим этот заряд обратно из точки B в точку A по другому пути b. Какую работу совершит электрическая сила в этом случае?

Если при перемещении пробного заряда из точки A в точку B по пути a электрическая сила совершает работу A, то, как мы только что установили, точно такую же работу она совершила бы над пробным зарядом при его перемещении из A в B по пути b. Но нас-то интересует работа, совершаемая при перемещении по пути b в обратном направлении — из B в A. Складывая именно эту работу с работой A по пути a, мы получим искомую работу по замкнутому пути. При этом заряд перемещается по пути b в обратном направлении, так что величины работы на каждом малом перемещении меняют знак. Вычисляя сумму работ на таких малых перемещениях, мы получим ту же величину, что и раньше, при расчете работы по пути b, но с противоположным знаком. Складывая сумму работ по пути a и полученную с обратным знаком работу по пути b, мы получим

$$A_a - A_b = 0.$$

Итак, работа электростатической силы при перемещении пробного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Этот вывод, как легко показать, справедлив для любой силы, вызываемой системой неподвижных электрических зарядов.

Теперь рассмотрим более общий случай силы произвольной природы.

Непотенциальное вихревое поле

Пусть задано некоторое силовое поле $\mathbf{F}$, т. е. определена сила, действующая в каждой точке пространства на пробное тело.

Будем перемещать пробное тело по очень малому замкнутому контуру и выясним, каким условиям должно удовлетворять поле $\mathbf{F}$, чтобы работа, совершаемая при перемещении пробного тела по этому контуру, была равна нулю.

Подсчитаем работу по перемещению пробного тела по малому прямоугольному замкнутому контуру, изо-