пути, по которому происходит перемещение пробного заряда.

Пусть мы сначала переместим пробный заряд из точки $A$ в точку $B$ по какому-то пути $a$, а потом переместим этот заряд обратно из точки $B$ в точку $A$ по другому пути $b$. Какую работу совершит электрическая сила в этом случае?

Если при перемещении пробного заряда из точки $A$ в точку $B$ по пути $a$ электрическая сила совершает работу $A$, то, как мы только что установили, точно такую же работу она совершила бы над пробным зарядом при его перемещении из $A$ в $B$ по пути $b$. Но нас-то интересует работа, совершаемая при перемещении по пути $b$ в обратном направлении — из $B$ в $A$. Складывая именно эту работу с работой $A$ по пути $a$, мы получим искомую работу по замкнутому пути. При этом заряд перемещается по пути $b$ в обратном направлении, так что величины работы на каждом малом перемещении меняют знак. Вычисляя сумму работ на таких малых перемещениях, мы получим ту же величину, что и раньше, при расчете работы по пути $b$, но с противоположным знаком. Складывая сумму работ по пути $a$ и полученную с обратным знаком работу по пути $b$, мы получим

$$A_a - A_b = 0.$$

Итак, работа электростатической силы при перемещении пробного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Этот вывод, как легко показать, справедлив для любой силы, вызываемой системой неподвижных электрических зарядов.

Теперь рассмотрим более общий случай силы произвольной природы.

## Непотенциальное вихревое поле

Пусть задано некоторое силовое поле $\mathbf{F}$, т. е. определена сила, действующая в каждой точке пространства на пробное тело.

Будем перемещать пробное тело по очень малому замкнутому контуру и выясним, каким условиям должно удовлетворять поле $\mathbf{F}$, чтобы работа, совершаемая при перемещении пробного тела по этому контуру, была равна нулю.

Подсчитаем работу по перемещению пробного тела по малому прямоугольному замкнутому контуру, изображенному на рис. П.13. Для простоты мы полагаем, что контур лежит в плоскости, перпендикулярной оси $Z$, и представляет собой последовательность показанных на рисунке малых перемещений, параллельных осям $X$ и $Y$. Полная работа силы есть сумма работ, совершаемых при каждом перемещении. Предполагая перемещение малым, мы можем считать, что величина силы при каждом малом перемещении не меняется.

При первом перемещении *1* на расстояние $\Delta y$ вдоль оси $Y$ работу совершает только составляющая силы вдоль этой оси $F_y(1)$ и эта работа равна $F_y(1)\cdot\Delta y$. При втором перемещении *2* на расстояние $\Delta x$ вдоль оси $X$ вклад в эту работу дает только составляющая силы $F_x(2)$ по оси $X$: величина работы при втором перемещении составляет $F_x(2)\cdot\Delta x$. Третье перемещение *3* так же, как и первое перемещение, происходит на расстоянии $\Delta y$ по линии, параллельной оси $Y$, и работу на этом перемещении тоже совершает только составляющая силы вдоль оси $Y$: $F_y(3)$, но теперь перемещение происходит в направлении, противоположном направлению оси $Y$, поэтому величина работы на этом перемещении имеет отрицательный знак: $-F_y(3)\cdot\Delta y$. Аналогично, и четвертое перемещение *4* похоже на второе перемещение, оно происходит на то же расстояние $\Delta x$ по линии, параллельной оси $X$, и работу на нем совершает только $F_x(4)$ — составляющая силы вдоль оси $X$: но перемещение происходит в направлении, противоположном направлению оси $X$, так что и здесь работа имеет отрицательный знак: $-F_x(4)\cdot\Delta x$.

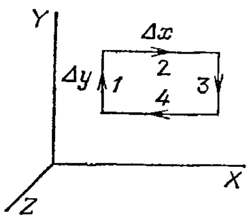

Рис. П.13. Замкнутый прямоугольный контур в плоскости $XY$

Полная работа, совершаемая силой при перемещении по рассматриваемому контуру, составляет

$$A = F_y(1)\Delta y + F_x(2)\Delta x - F_y(3)\Delta y - F_x(4)\Delta x =$$
$$= [F_x(2) - F_x(4)]\,\Delta x - [F_y(3) - F_y(1)]\,\Delta y.$$

Определим теперь заключенные в квадратные скобки разности проекций силы. Рассмотрим разность $F_y(3) - F_y(1)$. Это разность между значениями проекции силы на ось $Y$ при третьем и первом перемещении. Соответствующие этим перемещениям участки контура представляют собой малые отрезки с одинаковыми координатами на оси $Y$, смещенные друг относительно друга на малое расстояние $\Delta x$ вдоль оси $X$. Если мы будем стягивать контур вдоль оси $X$, приближая отрезок *3* к отрезку *1*, так что расстояние между ними будет стремиться к нулю, то в пределе бесконечно малого $\Delta x$ предел отношения разности $F_y(3) - F_y(1)$ к $\Delta x$ определит частную производную составляющей $F_y(x, y, z)$ по $x$ при постоянных $y$ и $z$. Тогда для очень малых $\Delta x$ рассматриваемая разность равна произведению $\Delta x$ и частной производной $\left.\frac{\partial F_y}{\partial x}\right|_{y, z} = F_{y, x}$

$$F_y(3) - F_y(1) \approx F_{y, x}\Delta x.$$

Рассуждая подобным же образом, найдем, что разность значений проекции силы на ось $X$ на отрезках, отвечающих второму и четвертому перемещению, $F_x(2) - F_x(4)$ при малых $\Delta y$ можно представить как произведение $\Delta y$ и частной производной функции $F_x(x, y, z)$ по $y$ при постоянных $x$ и $z$:

$$F_x(2) - F_x(4) \approx F_{x, y}\Delta y.$$

Итак, работа силы $F$ при перемещении пробного тела по рассматриваемому замкнутому контуру равна

$$A = (F_{x, y}\Delta y)\,\Delta x - (F_{y, x}\Delta x)\,\Delta y = F_{x, y}\Delta y \cdot \Delta x - F_{y, x}\Delta x \cdot \Delta y = (F_{x, y} - F_{y, x})\,\Delta x \cdot \Delta y.$$

Теперь заметим, что площадь $\Delta S$ внутри рассматриваемого прямоугольного контура как раз составляет $\Delta x \cdot \Delta y$. Окончательно получаем

$$A = (F_{x, y} - F_{y, x})\,\Delta S. \qquad (**)$$

Можно убедиться в том, что в действительности это соотношение справедливо не только для прямоугольного, но и вообще для любого малого плоского контура, расположенного в плоскости осей $X$ и $Y$.

Разобьем такой контур Г на малые прямоугольные контуры (рис. П.14). Выберем определенное направление обхода каждого контура. Тогда в двух соседних прямоугольных контурах перемещение по смежным сторонам будет происходить в противоположные стороны (рис. П.14), поэтому и вклады в работу по перемещению вдоль таких сторон в обоих контурах будут равными по величине и противоположными по знаку. Если мы посчитаем работу по перемещению пробного тела по каждому прямоугольному контуру, то для каждого контура мы можем записать соотношение (**). Сложив работу по перемещению тела по всем контурам, мы получим, что вклады в работу от всех линий, находящихся внутри рассматриваемого контура Г, взаимно уничтожаются, поскольку все они являются смежными для соседних внутренних контуров. Поэтому работа по обходу по всем прямоугольным контурам совпадает с работой по внешнему контуру Г. С другой стороны, суммарная работа есть сумма произведений площадей прямоугольных контуров и соответствующих величин $F_{x,y} - F_{y,x}$ внутри этих контуров. Получается, что работа по контуру Г равна

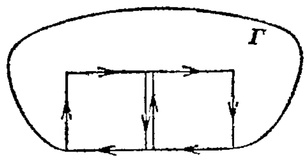


Рис. П.14. Работы по общим сторонам малых контуров компенсируются

$$A = [F_{x,y} - F_{y,x}]\Delta S_1 + [F_{x,y} - F_{y,x}]\Delta S_2 + \ldots$$

Мы выбрали контур Г малым, так что можно пренебречь изменением величины $[F_{x,y} - F_{y,x}]$ внутри этого контура. Значит, можно считать эту величину во всех прямоугольных контурах одной и той же, так что работа силы по перемещению пробного тела вдоль контура Г есть

$$A_Г = [F_{x,y} - F_{y,x}](\Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots).$$

Сумма площадей всех прямоугольных контуров, на которые мы разбили контур Г, равна полной площади, заключенной внутри этого контура. Таким образом, соотношение (**) оказывается справедливым для малого плоского контура любой формы.

Мы рассматривали контуры в плоскости осей $X$ и $Y$. Мы можем повторить наши рассуждения для малых плоских контуров в плоскости осей $X$ и $Z$. Работа силы по перемещению пробного тела вдоль таких малых плоских контуров выразится через частные производные по $x$ и $z$ от составляющих силы по осям $Z$ и $X$:

$$A = [F_{z,x} - F_{x,z}]\Delta S.$$

Аналогично, для малых плоских контуров, лежащих в плоскости осей $Y$ и $Z$, соотношение будет иметь вид

$$A = [F_{y,z} - F_{z,y}]\,\Delta S.$$

Итак, отнюдь не всегда работа силы по замкнутому контуру равна нулю. Неоднородности силового поля в окрестности каждой точки пространства должны удовлетворять определенным условиям для того, чтобы работа по перемещению тела по любому контуру в окрестности любой точки пространства была равна нулю. Эти условия связывают частные производные различных компонент вектора силы по различным направлениям. Только в случае, если в любой точке пространства выполнены соотношения

$$F_{x,y} = F_{y,x}, \quad F_{z,x} = F_{x,z}, \quad F_{y,z} = F_{z,y}, \qquad (***)$$

работа по любому замкнутому контуру будет равна нулю. Если работа по любому замкнутому контуру равна нулю, то и работа по перемещению пробного тела из одной точки в другую не будет зависеть от формы пути. Вычисляя работу по перемещению пробного тела из одной точки в другую, мы будем получать один и тот же ответ для любого пути, по которому мы совершаем перемещение. Фиксируя некоторую точку, мы можем определить работу силы по перемещению пробного тела из этой точки в любую другую точку пространства. Тем самым мы свяжем с каждой точкой пространства скалярную величину, равную величине работы по перемещению пробного тела из фиксированной точки в данную точку. Эту величину мы можем назвать *потенциалом* рассматриваемого *векторного поля.*

Таким образом, для векторного поля, удовлетворяющего условиям (***), может быть определен его *скалярный потенциал* $\varphi$. Такое векторное поле называется *потенциальным полем.* Выше, на примере скалярного электрического потенциала мы установили связь между потенциалом и векторным полем его градиента. Эта связь между потенциальным векторным полем и скалярным полем его потенциала имеет вид

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\varphi.$$

В декартовой системе координат это соотношение устанавливает связь между каждой компонентой вектора силы **F** и соответствующей компонентой вектора градиента потенциала, равной частной производной потенциала по соответствующей координате

$$F_x = \varphi_{,x}, \quad F_y = \varphi_{,y}, \quad F_z = \varphi_{,z}.$$

Подставим эти выражения для компонент силового поля в соотношения (***). Тогда эти соотношения превратятся в соотношения для пространственных производных потенциала. Например, первое соотношение в (***) будет иметь вид

$$(\varphi_{,x})_{,y} = (\varphi_{,y})_{,x}.$$

В левой части этого равенства надо сначала взять частную производную потенциала $\varphi$ по $x$ при постоянных $y$ и $z$, а потом эту частную производную продифференцировать по $y$ при постоянных $x$ и $z$. В правой части равенства последовательность дифференцирования обратная: сначала надо взять производную по $y$ при постоянных $x$ и $z$, а потом продифференцировать эту производную по $x$, считая $y$ и $z$ постоянными. Можно показать, что при любой последовательности дифференцирования ответ будет один и тот же.

Таким образом, можно непосредственной проверкой убедиться в том, что в потенциальном поле соотношения (***) справедливы.

## Циркуляция

В общем случае можно рассмотреть поле векторной величины, не обязательно имеющей физический смысл силы. В этом общем случае сумма скалярных произведений векторной величины и малых перемещений по замкнутому контуру — величина, аналогичная работе силы по перемещению пробного тела по замкнутому контуру, — называется *циркуляцией* рассматриваемой векторной величины. Это название сразу напоминает о циркуляции воды в водоворотах. Формально, условие того, что циркуляция векторной величины по любому замкнутому контуру равна нулю, записывается также в виде соотношений (***). Если эти соотношения выполнены на контуре и внутри него, то с рассматриваемым полем векторной величины связан скалярный потенциал, так что эта величина является градиентом ее потенциала и ее поле — потенциальное (см. выше).