работать в правой системе координат. Тогда характеризующий циркуляцию вектор будет при выбранном нами направлении циркуляции (рис. П.15) направлен вдоль оси Z. Мы получили вектор, не зависящий от выбора конкретного контура в плоскости XY, равный по абсолютной величине

$$F_{y,x} - F_{x,y} \tag{1}$$

и направленный по оси Z.

Точно так же можно установить, что отношение циркуляции по замкнутому контуру в плоскости YZ к площади, заключенной внутри этого контура, не зависит от выбора конкретного контура и представляет собой абсолютную величину

$$F_{z,y} - F_{y,z} \tag{2}$$

вектора, направленного вдоль оси X, а отношение циркуляции по замкнутому контуру в плоскости XZ к площади, заключенной внутри такого контура, определяет не зависящую от выбора контура абсолютную величину

$$F_{x,z} - F_{z,x} \tag{3}$$

вектора, направленного вдоль оси Y.

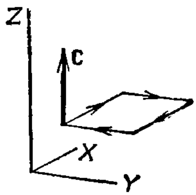

Рис. П.15. Направление вектора циркуляции определяется направлением обхода замкнутого контура

Мы получили три величины, направленные вдоль осей координат. Эти величины представляют собой составляющие вектора, характеризующего циркуляцию рассматриваемой векторной величины. Вектор с компонентами (1), (2) и (3) называется *ротором* или *вихрем* векторного поля F. Поле, у которого компоненты вихря (1), (2) и (3) отличны от нуля, называется *вихрем*. Потенциальное поле является безвихревым Ротор векторного поля $\mathbf{F}$ обозначается $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$.

Закон Гаусса

Мысленно окружим точечный заряд $+q$ сферой радиуса r и определим силу, с которой подействовал бы наш заряд на малый (пробный) положительный заряд $+e$, помещенный в какую-то точку на этой сфере. По закону Кулона получим

$$F = \frac{qe}{r^2}.$$

Теперь, взяв отношение этой величины к величине e, мы получим силу, действующую по направлению от заряда $+q$ к пробному единичному заряду. По определению эта сила и есть напряженность электрического поля. В каждой точке сферы напряженность направлена по радиусу наружу. Если мы изобразим напряженность на сфере стрелками, указывающими направление напряженности, то наша сфера станет похожа на свернувшегося ежа. При этом длина стрелок — абсолютная величина напряженности — в каждой точке сферы одна и та же: $E=q/r^2$. А теперь помножим абсолютную величину напряженности на сфере на площадь этой сферы $S=4\pi r^2$:

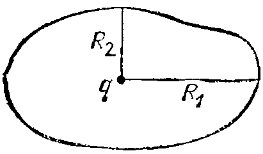

Рис. П.16. Напряженность поля точечного заряда на разных расстояниях разная

$$E\cdot S=\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2=4\pi q.$$

Мы подсчитали величину, которая называется *потоком напряженности электрического поля* через заданную поверхность (нашу сферу).

Эта величина определяется только зарядом, расположенным внутри сферы. Она не зависит от радиуса сферы. Выберем сферу другого радиуса R. Поток будет тем же самым. Пропорциональное квадрату радиуса сферы изменение площади сферы компенсируется пропорциональным обратному квадрату радиуса изменением напряженности. Поток напряженности остается тем же самым, потому что напряженность (электрическая сила) пропорциональна обратному квадрату расстояния. При любой другой зависимости напряженности (электрической силы) от расстояния поток не был бы постоянным и зависел бы от радиуса сферы.

Наш результат не зависит от формы окружающей точечный заряд поверхности, т. е. справедлив и в том случае, когда эта поверхность не сфера. В этом легко убедиться.

Окружим наш заряд некоторой поверхностью (рис. П.16). На этой поверхности напряженность меняется не только по направлению, но и по абсолютной величине. Одни ее части расположены ближе, другие дальше от заряда, соответственно по закону обратного квадрата расстояния меняется и величина напряженности.

Есть и другое отличие от случая сферической поверхности. Если разбить сферу на очень маленькие площадочки, на которых направление напряженности практически не меняется и которые можно рассматривать как плоские, то на таких площадочках напряженность будет направлена по нормали (перпендикулярно) плоскости площадочки. У произвольной по-

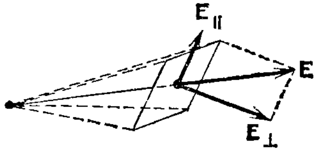

Рис. П.17. Вклад в поток электрической напряженности дает только нормальная $\mathbf{E}_\perp$ составляющая вектора напряженности $\mathbf{E}$. Тангенциальная составляющая $\mathbf{E}_\parallel$ вклада в поток не дает

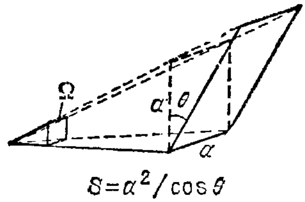

Рис. П.18. Площадь наклонной площадки составляет $S = a \cdot a/\cos\theta = a^2/\cos\theta$

верхности напряженность электрического поля на таких маленьких плоских площадочках уже не будет, вообще говоря, направлена по нормали к поверхности. Она может быть направлена под некоторым углом к поверхности, составляя некоторый угол θ с нормалью.

В этом случае, чтобы подсчитать поток напряженности через всю поверхность, надо определить поток через каждую площадочку и взять сумму по всем площадочкам.

Подсчитаем поток через отдельную площадочку. В случае сферы площадочки располагались перпендикулярно направлению напряженности электрического поля, и мы просто перемножили бы площадь площадочки и величину напряженности. В случае же площадок, расположенных под углом к направлению напряженности, вектор напряженности можно разложить на две его составляющие (рис. П.17). Одна составляющая направлена по нормали к площадочке, другая лежит в плоскости площадочки. Вклад в поток дает только составляющая, направленная по нормали к площадочке, и поток определяется уже абсолютной величиной проекции напряженности на нормаль (рис. П.17).

Мы разбили поверхность на маленькие площадочки, на которых можно пренебречь изменением напряженности, равной $E = q/r^2$, где r — расстояние от площадочки до точечного заряда q. Проекция вектора напряженности на нормаль к площадочке равна

$$E_н = E\cos\theta = \frac{q}{r^2}\cos\theta.$$

А какова площадь площадочки? Сравним ее с площадью квадратной площадочки $\Delta S = a^2$, выделяемой на сфере радиуса r (рис. П.18).

Наша наклонная прямоугольная площадка имеет то же основание a, что и площадка на сфере, а вот высота ее есть $a/\cos\theta$, так что ее площадь составляет $\Delta S_н = a\frac{a}{\cos\theta} = \frac{a^2}{\cos\theta} = \frac{\Delta S}{\cos\theta}$. Площадь $\Delta S_н$ выделяет на сфере радиуса r телесный угол $\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2}$.

Подсчитаем поток через наклонную площадку:

$$\text{поток} = E_н\Delta S_н = \frac{q}{r^2}\cos\theta\frac{\Delta S}{\cos\theta} = q\frac{\Delta S}{r^2} = q\,\Delta\Omega.$$

Из-за закона обратного квадрата расстояния поток через наклонную площадочку оказался независящим ни от угла ее наклона, ни от расстояния от заряда. Суммируя потоки через все площадочки, мы получим:

$$\begin{aligned}\text{полный поток} &= \text{поток через 1-ю площадочку} + \\ &+ \text{поток через 2-ю площадочку} + \\ &+ \text{поток через 3-ю площадочку} + \ldots = \\ &= q\,\Delta\Omega_1 + q\,\Delta\Omega_2 + q\,\Delta\Omega_3 + \ldots = \\ &= q\,(\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 + \Delta\Omega_3 + \ldots) = q\cdot 4\pi,\end{aligned}$$

поскольку для замкнутой поверхности полный телесный угол составляет 4π.

Итак, независимо от размеров и формы окружающей точечный заряд замкнутой поверхности полный поток через нее равен $4\pi q$.

Мы рассмотрели поток напряженности электрического поля точечного заряда, но принцип суперпозиции (наложения) электрических сил позволяет получить ответ для заряженного тела любой формы и размера.

Действительно, выберем замкнутую поверхность, окружающую тело. Разобьем его на кусочки, которые можно рассматривать как точечные заряды. Напряженность в каждой точке поверхности складывается из напряженностей, определяемых каждым таким кусочком. Соответственно, полный поток складывается из полных потоков напряженности каждого кусочка заряженного тела. Но для таких потоков от отдельных маленьких кусочков мы уже доказали, что поток напряженности электрического поля есть $4\pi\cdot$(заряд кусочка). Тогда

$$\text{Полный поток} = \text{сумме потоков от всех кусочков} =$$
$$= 4\pi\cdot(\text{сумма зарядов всех кусочков}) =$$
$$= 4\pi\cdot(\text{полный заряд тела}).$$

Мы получили замечательный закон:

Поток напряженности электрического поля через произвольную поверхность, окружающую заряженное тело, равен заряду тела, помноженному на 4π.

Этот закон — *закон Гаусса* — в симметричных случаях позволяет значительно проще, чем в прямых расчетах по закону Кулона, вычислять напряженность электрического поля. Мы сейчас убедимся в этом на примере задачи о напряженности поля заряженной сферы.

Напряженность электрического поля заряженной сферы

Окружим заряженную сферу сферической поверхностью большего радиуса R. По закону Гаусса поток напряженности через эту поверхность есть $4\pi\cdot$(заряд сферы). Но из симметрии рассматриваемой задачи следует, что абсолютная величина напряженности в каждой точке поверхности одна и та же, а направлена электрическая напряженность вдоль радиуса. В этом легко убедиться, рассмотрев вклад в напряженность в данной точке поверхности от двух кусочков заряженной сферы, расположенных симметрично относительно радиуса (рис. П.19). Этот вклад, по правилу сложения векторов, оказывается направленным вдоль радиуса. Полная напряженность в данной точке поверхности складывается из вкладов всех таких пар кусочков. Рассматривая другую точку