Теперь выберем сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром сферы, а радиус меньше, чем радиус сферы. Повторяя для такой поверхности *внутри* сферы все только что приведенные рассуждения с симметричными относительно радиуса малыми кусочками сферы, мы получаем, что напряженность электрического поля *внутри* сферы должна бы быть направлена по радиусу и иметь одинаковую абсолютную величину во всех точках рассматриваемой сферической поверхности. Есть только одно отличие: приравняв поток напряженности через эту поверхность заряду *внутри* нее, мы получим, что поток равен нулю — ведь никакого заряда *внутри* нашей поверхности нет — он сосредоточен *вне* ее на заряженной сфере. Площадь нашей поверхности не нулевая, так что равна нулю напряженность.

Итак, напряженность электрического поля внутри заряженной сферы оказалась равной нулю. Отсюда легко понять результаты опытов Франклина. Догадка Пристли была верной — дело тут действительно в законе обратного квадрата расстояния между точечными зарядами. Именно этот закон — закон Кулона — обеспечивает справедливость закона Гаусса *).

Используя закон Гаусса, можно определить поле заряженной плоскости и плоского конденсатора. Попробуйте проделать это сами.

Дивергенция электрического поля

Применим теперь закон Гаусса к малой окрестности произвольной точки M с координатами x, y, z. Выберем малую область, ограниченную прямоугольным параллелепипедом с ребрами, параллельными осям координат, так что длина ребра, параллельного оси X, составляет Δx, параллельного оси Y — Δy, а параллельного оси Z — Δz.

Будем считать грани параллелепипеда настолько малыми, что изменением на них вектора электрической напряженности можно пренебречь. (Мы уже рассматривали такие малые площадочки выше, когда

*) Заметим, что тот же закон обратных квадратов расстояния справедлив и для гравитации. Прекрасным способом проверки этого закона является измерение силы гравитационного притяжения внутри полой массивной сферы. Закону $1/r^2$ отвечает сила, строго равная нулю.

выводили закон Гаусса, исходя из закона Кулона.) Для рассматриваемой области поток напряженности через окружающую эту область поверхность складывается из шести потоков напряженности через каждую грань (рис. П.20). Каждый такой поток равен произведению проекции напряженности на внешнюю нормаль и площади соответствующей грани.

Складывая потоки через грани, получаем, что закон Гаусса для рассматриваемой области имеет вид

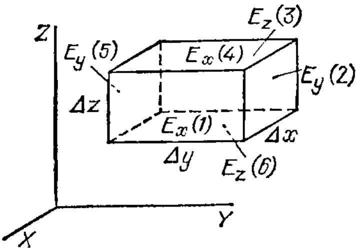

Рис. П.20. Замкнутая поверхность в форме малого прямоугольного параллелепипеда

$$E_x(1)\,\Delta y\,\Delta z - E_x(4)\,\Delta y\,\Delta z + E_y(2)\,\Delta x\,\Delta z - E_y(5)\,\Delta x\,\Delta z + E_z(3)\,\Delta x\,\Delta y - E_z(6)\,\Delta x\,\Delta y = 4\pi$$

(полный заряд внутри параллелепипеда).

Поделим левую и правую части этого соотношения на объем рассматриваемой области, равный $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Отношение полного заряда внутри этой области к ее объему представляет собой среднюю по объему плотность заряда $\rho_{ср}$, так что закон Гаусса примет вид

$$\frac{E_x(1) - E_x(4)}{\Delta x} + \frac{E_y(2) - E_y(5)}{\Delta y} + \frac{E_z(3) - E_z(6)}{\Delta z} = 4\pi\rho_{ср}.$$

Теперь посмотрим, что получится в пределе бесконечно малой области, т. е. в пределе бесконечно малых Δx, Δy, Δz. Первое слагаемое в левой части последнего соотношения в пределе бесконечно малого Δx совпадает с частной производной составляющей E_x по x при постоянных y и z, т. е. $E_{x,\,x}$. Второе слагаемое в пределе $\Delta y \to 0$ равно частной производной $E_{y,\,y}$, а третье — в пределе $\Delta z \to 0$ равно частной производной $E_{z,\,z}$. В пределе бесконечно малого объема средняя плотность заряда приближается к локальной плотности заряда ρ, характеризующей плотность заряда в рассматриваемой точке M. Мы получили независящую от выбора малой окрестности точки M связь между пространственным изменением напряженности электрического поля в произвольной точке M

и плотностью заряда в этой точке:

$$E_{x,x} + E_{y,y} + E_{z,z} = 4\pi\rho.$$

Выражение в левой части представляет собой *дивергенцию* напряженности электрического поля. Закон Гаусса, который мы вывели из закона Кулона, из представления о дальнодействии электрической силы между зарядами, в теории поля привел нас к локальной связи между пространственным изменением электрической напряженности и плотностью электрического заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Комплексные числа

Всякий раз, когда ставится «неправильный вопрос» (неправильный в рамках данного класса чисел), ответ на него требует расширения числового класса. В классе положительных чисел ответ на вопрос, что будет, если из меньшего числа вычесть большее, невозможен: он приводит к числам отрицательным. В классе целых чисел результат деления на число, не являющееся нормальным делителем делимого, не определен. Мы приходим к числам рациональным, отвечая на вопрос о частном такого деления. Результат извлечения корня квадратного из целого числа, не являющегося полным квадратом, не содержится в классе рациональных чисел — это число иррациональное. Каждый такой «неправильный вопрос» задается правильно. Задается, потому что возникает потребность в ответе на него. Потому что для описания реальности «старых чисел» оказывается недостаточно. Каждый такой «неправильный вопрос» ведет к обобщению понятия числа.

Чтобы что-то измерить, нам нужна линейка. Чтобы измерить что-то очень точно, нужно иметь очень мелкую шкалу деления. Иногда важно знать, что происходит ниже уровня, выбранного нами за нулевой. Если мы возьмем бесконечно длинную линейку с бесконечно мелкими делениями, у которой есть положительные и отрицательные деления, мы можем измерить что угодно, мы можем нанести на нее любую шкалу и отметить точкой — *действительным числом* — результат измерения.