и плотностью заряда в этой точке:

$$E_{x,x} + E_{y,y} + E_{z,z} = 4\pi\rho.$$

Выражение в левой части представляет собой *дивергенцию* напряженности электрического поля. Закон Гаусса, который мы вывели из закона Кулона, из представления о дальнодействии электрической силы между зарядами, в теории поля привел нас к локальной связи между пространственным изменением электрической напряженности и плотностью электрического заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Комплексные числа

Всякий раз, когда ставится «неправильный вопрос» (неправильный в рамках данного класса чисел), ответ на него требует расширения числового класса. В классе положительных чисел ответ на вопрос, что будет, если из меньшего числа вычесть большее, невозможен: он приводит к числам отрицательным. В классе целых чисел результат деления на число, не являющееся нормальным делителем делимого, не определен. Мы приходим к числам рациональным, отвечая на вопрос о частном такого деления. Результат извлечения корня квадратного из целого числа, не являющегося полным квадратом, не содержится в классе рациональных чисел — это число иррациональное. Каждый такой «неправильный вопрос» задается правильно. Задается, потому что возникает потребность в ответе на него. Потому что для описания реальности «старых чисел» оказывается недостаточно. Каждый такой «неправильный вопрос» ведет к обобщению понятия числа.

Чтобы что-то измерить, нам нужна линейка. Чтобы измерить что-то очень точно, нужно иметь очень мелкую шкалу деления. Иногда важно знать, что происходит ниже уровня, выбранного нами за нулевой. Если мы возьмем бесконечно длинную линейку с бесконечно мелкими делениями, у которой есть положительные и отрицательные деления, мы можем измерить что угодно, мы можем нанести на нее любую шкалу и отметить точкой — *действительным числом* — результат измерения.

Числа рациональные и иррациональные появились на этой линейке как результат дробления масштаба, числа отрицательные — как результат ее продолжения в оба конца от нуля. Получалась универсальная измерительная ось, годная, казалось бы, на все случаи жизни. Но вот для описания квантовых процессов этой оси уже оказалось недостаточно.

Что будет, если извлечь квадратный корень из отрицательного числа? Что такое $\sqrt{-1}$? В мире действительных чисел это «неправильный вопрос». Ответ на вопрос о корне из -1 выводит нас за пределы действительной числовой оси. Величина $i=\sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*. Это — единица на оси мнимых чисел.

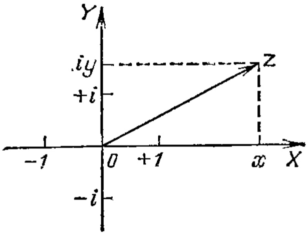

Рис. П.21. Плоскость комплексной переменной z. Точки вещественной оси X — вещественные числа; ось Y — мнимая ось, точки на ней — мнимые числа. Проекции комплексного числа z на вещественную и мнимую оси определяют величину его действительной и мнимой частей

Совокупность чисел действительных и мнимых составляет *числа комплексные*. Комплексное число $z=x+iy$ есть по сути пара двух действительных чисел: одно — x называется *действительной частью* z, а второе y — его *мнимой частью*. Комплексное число изображается точкой на комплексной плоскости (рис. П.21). Проекции каждой точки z этой плоскости на действительную ось X и мнимую ось Y (рис. П.21) определяют, соответственно, действительную и мнимую части комплексного числа z. Единица на оси X — это обычная единица. Единица на оси Y — это мнимая единица, это величина $i=\sqrt{-1}$. Комплексные числа можно складывать и вычитать — при этом по отдельности складываются и вычитаются действительные и мнимые части. Комплексные числа можно перемножать друг на друга, учитывая правило $i^2=-1$. Например,

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+$$
$$+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+y_2x_1).$$

Число $z^* = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = x + iy$. Произведение комплексного числа z и его комплексно сопряженного z^* есть число действительное $zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Его выбирают за «меру абсолютной величины» комплексных чисел. Величину $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют *модулем комплексного числа* z. На комплексной плоскости модуль комплексного числа z есть расстояние от точки, отвечающей числу z, до начала координат O. Угол φ между отрезком OM и действительной осью X называется *аргументом комплексного числа*.

Комплексное число характеризуется точкой в комплексной плоскости. Можно задать координаты этой точки — ее проекции на действительную и мнимую оси. Тем самым комплексное число задается его действительной и мнимой частью. А можно задать расстояние Oz и угол φ. Тогда комплексное число z определяется по его модулю и аргументу. Связь между двумя определениями простая: $x = |z| \cos\varphi$ и $y = |z| \sin\varphi$, так что $z = x + iy = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Мы уже объяснили, как перемножаются комплексные числа. А что такое число, возведенное в комплексную степень? Выделив в комплексной степени действительную часть, например, $e^z = e^{x+iy} = e^x + e^{iy}$, мы сталкиваемся с выражением e^{iy}. Что такое мнимая степень $e^{i\varphi}$? В теории комплексных чисел вводится определение мнимой степени $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Используя это определение*), комплексное число z можно записать через его модуль $|z|$ и аргумент φ как $z = |z| e^{i\varphi}$. В такой форме записи произведение двух комплексных чисел $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$ дает $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, т. е. модули перемножаются, а аргументы складываются. Вот, пожалуй, основное, что нам потребуется из науки о комплексных величинах.

---

*) Это определение можно понять из следующих соображений. При малых $x \ll 1$ имеем $e^x \approx 1 + x$ для действительных x. Если мы предположим, что то же справедливо и для $e^{i\varphi}$ при малых $\varphi \ll 1$, т. е. $e^{i\varphi} \approx 1 + i\varphi$, то, учитывая, что $\cos\varphi \approx 1$ $(\varphi \ll 1)$ и $\sin\varphi \approx \varphi$ $(\varphi \ll 1)$, получим $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ при $\varphi \ll 1$. Обобщая это соотношение на случай не малых φ, получаем указанное определение мнимой степени.