Уравнения Максвелла

Рассматривая теорию поля (см. Математическое дополнение, с. 213), можно установить, что закон Кулона для силы взаимодействия двух зарядов приводит к закону Гаусса, который связывает полный электрический заряд, заключенный внутри данной поверхности, с потоком силовых линий через эту поверхность. В малой окрестности произвольной точки пространства закон Гаусса сводится к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (1)$$

Это уравнение является *первым уравнением Максвелла.* Если ограничиться электростатикой и рассматривать только покоящиеся заряды, то электрическое поле (поле электрической напряженности) является безвихревым, так что в окрестности любой точки пространства должно выполняться условие нулевой циркуляции напряженности электрического поля (в общем случае движущихся зарядов — это не так!)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \qquad (2)$$

Эти два соотношения полностью описывают всю совокупность электростатических явлений *).

Перейдем к описанию стационарных (не зависящих от времени) процессов магнитного взаимодействия — *магнитостатике.* Для описания магнитного взаимодействия вводится векторная величина **H** — напряженность магнитного поля, характеризующая магнитное поле. Если бы мы исходили из закона Кулона для «магнитных зарядов», то вектор напряженности **H** можно было бы ввести аналогично вектору напряженности **E** — как силу, действующую на единичный пробный магнитный заряд. Проводя все выкладки, которые привели нас в конечном счете к закону Гаусса и к уравнению Максвелла (1), мы получили бы формально точно такое же уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi\rho_{\text{м}}.$$

*) Подчеркнем, однако, что это не все. Не следует думать, что при $\rho = 0$ имеет место $\mathbf{E} = 0$ везде. Как мы увидим позже, в нестационарных ситуациях $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$, и поэтому в целом вполне возможно $\rho = 0$, но $\mathbf{E} \neq 0$. Такая ситуация имеет место, например, в радиоволне — но обо всем этом см. ниже.

Но в этом уравнении справа стоит $\rho_м$ — плотность «магнитного заряда». Ни в каких процессах намагничивания изолированные магнитные полюса не получаются. Разделив магнит, мы получаем все меньшие магнитики, у которых имеются оба магнитных полюса. Таким образом, в случае магнетизма величина в правой части всегда равна нулю. Мы приходим к уравнению Максвелла *):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Остается описать магнитное воздействие постоянного тока. Магнитное действие тока, текущего по прямому проводу, является отклоняющим. Поэтому поле магнитной напряженности оказывается *вихревым*. Электрический ток оказывается связанным с циркуляцией магнитной напряженности. Некоторое представление о математическом понятии циркуляции было дано в Математическом дополнении выше, с. 211. В простейшем случае прямого провода магнитное поле тока направлено по кругу (рис. П.22). В теории поля циркуляция векторной величины связывается с ее локальной характеристикой — ротором или вихрем рассматриваемой величины (см. Математическое дополнение, с. 212). Поэтому в уравнение будет входить ротор магнитной напряженности rot **H**.

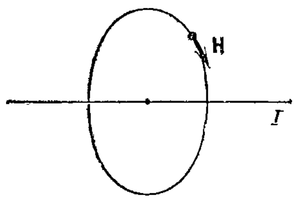

Рис. П.22. Круговое магнитное поле **H** прямого провода с постоянным током I

Как охарактеризовать ток — течение электрического заряда? Течение воды можно описывать количеством воды, протекающей через данное сечение за единицу времени. Точно так же течение электрического заряда можно характеризовать зарядом, протекающим через данное сечение проводника в единицу времени. Локальной характеристикой тока является его *плотность* — ток через единицу площади сечения. Плотность тока от формы сечения проводника не зависит — это локальная векторная характеристика тока. Четвертое уравнение Максвелла связывает ротор

*) Как и для **E**, из условия $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ не следует $\mathbf{H} = 0$, и к этому мы переходим.

вектора магнитной напряженности с вектором плотности электрического тока $\mathbf{j}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Постоянная 4π в этом соотношении связана с используемой нами системой единиц СГСЕ, а множитель $1/c$, где c имеет размерность скорости, вводится из соображений размерности. Итак, имеются всего четыре уравнения, описывающие всю совокупность стационарных (не зависящих от времени) электрических и магнитных явлений.

Теперь перейдем к *нестационарным* процессам. Первое уравнение оказывается справедливым и в этом случае. А вот второе уравнение уже следует изменить. Опыты Фарадея по изучению электромагнитной индукции показали, что изменение магнитного поля со временем вызывает появление тока, циркулирующего в витке провода. Ток, упорядоченное движение зарядов в проводе*), вызывается электрической силой (напряженностью электрического поля), циркулирующей в проводе. Появление такой напряженности в витке провода вследствие изменения потока напряженности магнитного поля через плоскость витка и составляет явление *электромагнитной индукции*. Переменное магнитное поле — источник циркуляции электрического поля. Поэтому в нестационарном случае второе уравнение уже не справедливо. В нестационарном случае второе уравнение должно описывать явление электромагнитной индукции. Оно должно

---

*) Течение тока есть нечто промежуточное между стационарной и нестационарной ситуациями. Для наблюдателя один электрон сменяет другой, картина одна и та же. Но индивидуальный электрон движется, он переходит с одного конца провода на другой. Правда, время движения индивидуального электрона велико. При токе в 1 ампер отдельный электрон проходит с одного конца медного провода длиной 1 м и сечением 1 мм до другого конца за сутки. Такова скорость упорядоченного движения электрона. На это движение накладывается тепловое движение, фермиевское движение электронов в металлах. Поэтому, даже если скорость упорядоченного движения $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, то $\langle u^2 \rangle \neq 0$ вследствие неупорядоченного движения электронов в веществе. Квантовая механика учит нас, что и при абсолютном нуле температуры, в низшем энергетическом состоянии, электроны движутся, но так, что средний ток равен нулю (существует так называемое фермиевское движение). В металле скорость фермиевского движения соответствует скорости порядка 10^8 см/с = 1000 км/с.

связывать циркуляцию напряженности электрического поля (локально — ее ротор) с изменением со временем напряженности магнитного поля (характеристикой такого мгновенного изменения по аналогии с мгновенной скоростью является производная вектора **H** по времени, причем производная — частная, определяемая в данной точке при неизменных пространственных характеристиках). Тем самым в нестационарном случае второе уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Знак «минус» означает, что циркуляция электрического поля должна вызывать в витке такое направление тока, при котором магнитное действие этого тока стремится компенсировать начальное изменение магнитного поля. Соображения размерности и в этом случае требуют, чтобы в правой части появился множитель размерности с/см, т. е. обратной скорости. Оказывается, что это именно $1/c$, где c — скорость света! (см. ниже).

В нестационарном случае третье уравнение остается справедливым. Для описания всех известных во времена Максвелла электромагнитных явлений не требовало изменения в нестационарном случае и четвертое уравнение. Но физическая картина, стоящая перед мысленным взором Максвелла, требовала для своего завершения модификации этого уравнения. Исходя из симметрии между электричеством и магнетизмом, Максвелл предположил, что должно существовать новое нестационарное явление, подобное явлению электромагнитной индукции — ток смещения (см. с. 42). С учетом тока смещения четвертое уравнение Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Электромагнитные волны

Здесь мы обсудим свойства электромагнитных волн как решений уравнений Максвелла.

Чтобы выяснить, что это за решения, обратимся к уравнениям Максвелла для «пустого» пространства, в котором плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j}$ равны нулю. В «пустом» пространстве при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$