Это еще один способ определения вектора — в сферической системе координат (см. рис. П.4, *б*). С другой стороны, можно определить положение любой точки с помощью радиус-вектора, начало которого совпадает с началом координат, а конец совпадает с данной точкой.

Скалярное произведение

Чтобы помножить два числа, мы используем таблицу умножения — правило, по которому этим двум числам сопоставляется некоторое третье число — их произведение. Скалярное умножение двух векторов определяется правилом, по которому этим векторам сопоставляется некоторый скаляр — некоторое число — их скалярное произведение.

Скалярное произведение двух векторов **a** и **b** принято обозначать **ab**, или (**a**, **b**), или **a**·**b**. Задаваясь абсолютной величиной и направлением в пространстве двух векторов, можно определить их скалярное произведение как произведение абсолютных величин двух векторов и косинуса угла между их направлениями.

Например, пусть F — абсолютная величина вектора силы **F**, r — абсолютная величина вектора перемещения **r** и θ — угол направления действия силы и перемещения. Скалярное произведение векторов силы **F** и перемещения **r** есть величина работы силы $A = \mathbf{Fr} = Fr\cos\theta$.

Легко видеть, что скалярное произведение векторов **a** и **b** можно определить как произведение длины вектора **a** и проекции **b** на направление **a**, т. е. ab_a, или как произведение длины **b** и длины проекции вектора **a** на направление вектора **b**, т. е. ba_b. Так, работа силы **F** при перемещении **r** равна произведению модуля силы F и проекции перемещения на направление действия силы **F**:

$$A = Fr_{\mathbf{F}},$$

и эта же работа равна произведению величины перемещения r и величины проекции силы F на направление перемещения: $A = F_r r$.

Наконец, если мы выбрали прямоугольную систему координат (оси координат направлены под прямым углом друг к другу) и определили наши векторы по их проекциям на оси координат, скалярное произведение оказывается равным сумме произведений проекций на те же оси.

Например, пусть электрическая сила **F** имеет составляющую F_x в направлении оси X, составляющую F_y в направлении оси Y и составляющую F_z в направлении оси Z, и мы совершили перемещение **r**, так что заряд сместился на расстояние x вдоль оси X, на расстояние y вдоль оси Y и на расстояние z вдоль оси Z. Тогда скалярное произведение векторов силы **F** и перемещения **r**, т. е. работа силы **F** при перемещении **r** есть $A = \mathbf{F}\mathbf{r} = F_x x + F_y y + F_z z$.

Все приведенные определения скалярного произведения эквивалентны. Они дают один и тот же ответ.

Работа силы **F** складывается из работы вдоль направления оси X, работы вдоль направления оси Y и работы вдоль направления оси Z. Замечательно, что мы можем повернуть систему координат и проекции векторов на оси изменятся, но величина скалярного произведения остается той же самой. Как мы уже говорили выше, в этом важнейшее свойство скалярных величин — при всевозможных поворотах осей координат они остаются неизменными. В частности, при всевозможных поворотах не меняется скалярное произведение вектора **a** на самого себя: **aa**, равное квадрату длины вектора **a**, т. е. a^2. Тем самым неизменность (инвариантность) длины вектора при поворотах системы координат оказывается частным случаем инвариантности скалярного произведения векторов (и вообще скалярных величин) относительно таких преобразований.

Каждый вектор можно представить как сумму двух или нескольких составляющих его векторов. Например, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{b}_n$. В этом случае скалярное произведение векторов **a** и **b** можно представить как сумму попарных произведений отдельных составляющих векторов: $\mathbf{ab} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$. Записав $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z$, получаем по этому правилу (учитывая $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$; $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$) $\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Меняя в скалярном произведении векторов направление одного из векторов, мы меняем знак скалярного произведения.

Приведем пример применения понятия скалярного произведения. С помощью векторного исчисления доказательство теоремы Пифагора упрощается. Для гипотенузы $\mathbf{c}$ и двух катетов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо соотношение $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, при этом направленные вдоль катетов векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны и скалярные произведения $\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = 0$. Поэтому $\mathbf{c}^2 = c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2 = a^2 + b^2$.

Понятия скаляра и вектора, а также скалярного произведения двух векторов непосредственно обобщаются на пространство любого числа измерений: плоское (2-мерное), 4-мерное и т. д. Выше все изложение велось для нашего привычного 3-мерного пространства.

Векторное произведение

Имеется и другая операция умножения двух векторов, при которой произведение этих векторов также является вектором. Эта операция называется *векторным умножением* двух векторов.

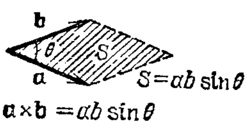

Рис. П.5 Абсолютная величина векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

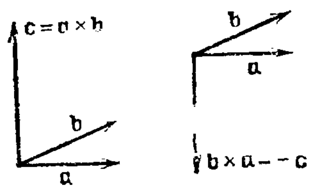

Рис. П.6. Направление вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ определяется по правилу правого винта. Вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ имеет направление, противоположное направлению вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c}$, абсолютная величина которого определяется произведением абсолютных величин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и синуса угла θ между ними: $c = ab \sin \theta$. Эта величина совпадает с величиной площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. П.5). Направление вектора совпадает с направлением поступательного движения «правого» винта при повороте по короткой дуге от первого вектора ко второму (рис. П.6), т. е. направление вектора $\mathbf{c}$