Приведем пример применения понятия скалярного произведения. С помощью векторного исчисления доказательство теоремы Пифагора упрощается. Для гипотенузы $\mathbf{c}$ и двух катетов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо соотношение $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, при этом направленные вдоль катетов векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны и скалярные произведения $\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = 0$. Поэтому $\mathbf{c}^2 = c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2 = a^2 + b^2$.

Понятия скаляра и вектора, а также скалярного произведения двух векторов непосредственно обобщаются на пространство любого числа измерений: плоское (2-мерное), 4-мерное и т. д. Выше все изложение велось для нашего привычного 3-мерного пространства.

Векторное произведение

Имеется и другая операция умножения двух векторов, при которой произведение этих векторов также является вектором. Эта операция называется *векторным умножением* двух векторов.

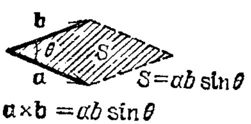

Рис. П.5 Абсолютная величина векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

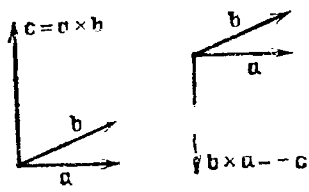

Рис. П.6. Направление вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ определяется по правилу правого винта. Вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ имеет направление, противоположное направлению вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c}$, абсолютная величина которого определяется произведением абсолютных величин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и синуса угла θ между ними: $c = ab \sin \theta$. Эта величина совпадает с величиной площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. П.5). Направление вектора совпадает с направлением поступательного движения «правого» винта при повороте по короткой дуге от первого вектора ко второму (рис. П.6), т. е. направление вектора $\mathbf{c}$

перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b** и совпадает с направлением вектора угла вращения правого винта от **a** к **b**.

Векторное произведение обозначается $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $[\mathbf{ab}]$. Знак векторного произведения в отличие от скалярного зависит от порядка сомножителей: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, так как при замене порядка сомножителей направление вращения от первого вектора ко второму меняется на противоположное. Соответственно, меняется на противоположное и направление векторного произведения (рис. П.5, П.6). Отсюда следует, что векторное произведение вектора **a** на самого себя равно нулю:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0.$$

В декартовых координатах x, y и z компоненты векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ выражаются через компоненты векторов **a** и **b** следующим образом:

по оси x $\quad a_yb_z - a_zb_y$,

по оси y $\quad a_zb_x - a_xb_z$,

по оси z $\quad a_xb_y - a_yb_x$.

Легко видеть, что векторное произведение можно определить только в трехмерном пространстве.

Примером векторного произведения может служить сила, действующая на электрон в магнитном поле:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}.$$

Разберем более подробно другой пример. Вращая головку винта по или против часовой стрелки, мы будем либо завинчивать, либо вывинчивать винт. С направлением вращения головки винта связано поступательное движение самого винта и, соответственно, некоторое выделенное направление в пространстве, вдоль которого винт перемещается. Чем больше угол поворота, тем больше завинчивается или вывинчивается сам винт. Поэтому с вращением головки винта можно связать некоторую величину, характеризуемую числовым значением — величиной угла поворота головки винта, и направлением в пространстве — направлением поступательного перемещения винта.

С вращением головки винта можно связать векторную величину — вектор угла поворота головки винта. Абсолютная величина этого вектора равна углу поворота, а направлен этот вектор вдоль оси, по которой происходит поступательное движение винта, перпендикулярно плоскости вращения головки винта. Остается еще элемент произвола, связанный с выбором положительного направления на этой оси. Винт может иметь правовинтовую или левовинтовую (рис. П.7) нарезку. Вращая нарезку таких винтов в одну и ту же сторону (например, так, как это изображено на рис. П.7), мы получим, что «левый» и «правый» винты приобретут поступательное движение в противоположных направлениях. Условимся определять

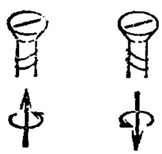

Рис. П.7. Вращая «левый» и «правый» винты в одну сторону, мы получаем поступательное движение в противоположных направлениях.

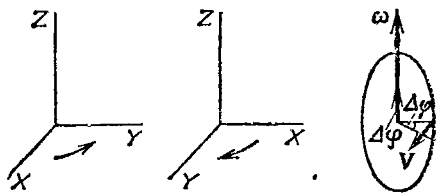

Рис. П.8. Направление вектора угла поворота $\Delta\varphi$ и вектора угловой скорости ω определяется по правилу правого винта, в соответствии с выбором осей в правой системе координат

направление вектора угла вращения по поступательному движению «правого» (рис. П.7) винта. Это условие отвечает выбору «правой» системы координат — системы декартовых координат, в которой выбор направлений осей X и Y определяет «правовинтовое» направление оси Z: ось Z должна быть направлена так, как был бы направлен вектор угла вращения правого винта при повороте осей X и Y в плоскости в направлении от положительного направления оси X к положительному направлению оси Y (рис. П.8). В «левой» системе координат направление такого поворота противоположно (рис. П.8). Векторное произведение определяется по правовинтовому направлению. Так же определяются и вектор угла поворота $d\varphi$, и вектор угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$. Определяя вектор линейной скорости $\mathbf{v}$ смещением точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$ вращающегося тела $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, мы получаем другой пример векторного произведения

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Подчеркнем условность выбора положительного направления вектора угловой скорости. Этот выбор совпадает с выбором положительного направления векторного произведения. Поэтому направление вектора скорости $\mathbf{v}$ не зависит от выбора «правой» или «левой» системы координат: произвол в выборе знака угловой скорости компенсируется произволом в выборе направления векторного произведения.

Тензоры

В общем случае двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, каждый из которых определяется тройкой его проекций на оси координат, можно сопоставить объект, определяемый девятью всевозможными попарными произведениями проекций этих векторов ($a_x b_x$, $a_x b_y$, $a_x b_z$, ...). Такой объект T_{ik}, удовлетворяющий определенному закону преобразований его девяти компонент при преобразовании координат, называется *тензором* 2 ранга. Простейший пример тензора — девятка коэффициентов T_{ik} преобразования одного вектора в другой: компоненты двух векторов a_i и b_i связаны соотношением $a_i = T_{ik} b_k$. Общая теория тензоров любого ранга включает и векторы (т. е. тензоры 1 ранга) и скаляры (т. е. тензоры 0 ранга).

С помощью тензоров многие физические соотношения могут быть записаны в весьма компактной форме, однако обсуждение свойств тензоров и физических приложений тензорного анализа выходит далеко за рамки нашего изложения.

4-векторы

Описание пространственно-временных свойств использует понятие события. *Событие* характеризуется положением в пространстве и моментом времени. Три пространственные координаты x, y, z и момент времени t, когда событие происходит, составляют четверку величин, являющуюся простейшим примером 4-вектора. Согласно теории относительности при переходе из одной инерциальной системы в другую — при преобразованиях Лоренца — понятие одно-