ной скорости $\mathbf{v}$ смещением точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$ вращающегося тела $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$, мы получаем другой пример векторного произведения

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}.$$

Подчеркнем условность выбора положительного направления вектора угловой скорости. Этот выбор совпадает с выбором положительного направления векторного произведения. Поэтому направление вектора скорости $\mathbf{v}$ не зависит от выбора «правой» или «левой» системы координат: произвол в выборе знака угловой скорости компенсируется произволом в выборе направления векторного произведения.

Тензоры

В общем случае двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, каждый из которых определяется тройкой его проекций на оси координат, можно сопоставить объект, определяемый девятью всевозможными попарными произведениями проекций этих векторов (a_xb_x, a_xb_y, a_xb_z, ...). Такой объект T_{ik}, удовлетворяющий определенному закону преобразований его девяти компонент при преобразовании координат, называется *тензором* 2 ранга. Простейший пример тензора — девятка коэффициентов T_{ik} преобразования одного вектора в другой: компоненты двух векторов a_i и b_i связаны соотношением $a_i=T_{ik}b_k$. Общая теория тензоров любого ранга включает и векторы (т. е. тензоры 1 ранга) и скаляры (т. е. тензоры 0 ранга).

С помощью тензоров многие физические соотношения могут быть записаны в весьма компактной форме, однако обсуждение свойств тензоров и физических приложений тензорного анализа выходит далеко за рамки нашего изложения.

4-векторы

Описание пространственно-временных свойств использует понятие события. *Событие* характеризуется положением в пространстве и моментом времени. Три пространственные координаты x, y, z и момент времени t, когда событие происходит, составляют четверку величин, являющуюся простейшим примером 4-вектора. Согласно теории относительности при переходе из одной инерциальной системы в другую — при преобразованиях Лоренца — понятие одновременности событий меняется: временны́е и пространственные координаты преобразуются по определенному закону.

4-вектор a_μ можно определить как совокупность 4-х величин, a_1, a_2, a_3 и a_0. При преобразованиях пространственных координат три величины a_1, a_2 и a_3 преобразуются как компоненты вектора **a**, а четвертая, a_0, является скаляром. Компонента a_0 называется временно́й компонентой 4-вектора, а компоненты вектора **a** составляют пространственные компоненты этого 4-вектора. Энергия-импульс, 4-вектор плотности тока являются примерами 4-векторов.

Два события, происходящие на расстоянии $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ через промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_2$, измеренные в некоторой инерциальной системе отсчета, разделены интервалом

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\mathbf{r})^2.$$

Интервал является аналогом расстояния в обычном пространстве. При преобразованиях Лоренца величина интервала не меняется, как не меняется расстояние при изменении системы координат в пространстве. В отличие от квадрата расстояния, который определяется как сумма квадратов расстояний вдоль всех пространственных осей

$$(\Delta\mathbf{r})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

и который не может принимать отрицательных значений, величина интервала может быть и отрицательной. Если интервал положительный $\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\mathbf{r})^2 > 0$, т. е. $c^2(\Delta t)^2 > (\Delta\mathbf{r})^2$, то события разделены *времениподобным интервалом*, если $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\mathbf{r})^2 = 0$ и $(\Delta\mathbf{r})^2 = c^2(\Delta t)^2$, то они разделены светоподобным интервалом, а при $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\mathbf{r})^2 < 0$ и $c^2(\Delta t)^2 < (\Delta\mathbf{r})^2$ они разделены *пространственноподобным интервалом*.

Интервал является примером квадрата 4-вектора, имеющего временную координату $c\Delta t$ и пространственные координаты $\Delta\mathbf{r}$. Аналогично определяется инвариантная при преобразованиях Лоренца величина квадрата любого 4-вектора $a_\mu = (a_0, \mathbf{a})$: $a_\mu^2 = a_0^2 - \mathbf{a}^2$.

Сумма двух 4-векторов a_μ и b_μ есть 4-вектор с временной компонентой $a_0 + b_0$ и пространственными компонентами $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (определяемыми по правилу сложения обычных векторов).

Скалярное произведение 4-векторов $a_\mu = (a_0, \mathbf{a})$ и $b_\mu = (b_0, \mathbf{b})$ определяется как разность произведения временны́х компонент $a_0 b_0$ и скалярного произведения пространственных компонент $\mathbf{ab}$:

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}.$$

Определения скалярного произведения и квадратов 4-векторов, отражают псевдоевклидовость пространства-времени.

Пространство-время

Некоторое представление о специфике псевдоевклидова пространства-времени дает приведенный здесь простой пример движения по одной пространственной оси. В этом случае события изображаются точками на плоскости x и t (рис. П.9). Линии $x = \pm ct$ разделяют события, отделенные от события в начале координат, пространственноподобными (II, II') и времениподобными (I и III) интервалами.

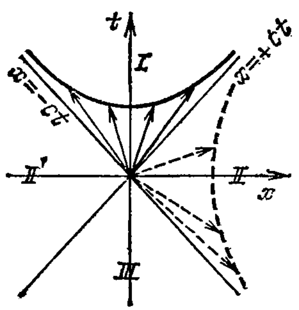

Рис. П.9. Пространство-время. Все сплошные стрелочки соединяют начало координат с событиями, отделенными от начала одинаковым положительным интервалом; штриховые — одинаковым отрицательным интервалом

Казалось бы, две диагонали $x = \pm ct$ определяют ось x и ось t как биссектрисы соответствующих прямых углов и, таким образом, выделяют определенную систему отсчета, связанную с данным событием. Но это не так.

На графике сплошные стрелки — линии одинаковой длины, так как в пространстве-времени длина определяется как квадрат интервала. Для сплошных стрелок этот квадрат положительный, для штриховых — отрицательный. Нам только кажется, что все сплошные линии (или все штриховые линии) имеют разную длину, потому что мы привыкли к евклидову мероопределению. После преобразования Лоренца осевыми ($x = \text{const}$, $t = \text{const}$) становятся другие векторы, но картина в целом сохраняется. Итак, пло-