Скалярное произведение 4-векторов $a_\mu = (a_0, \mathbf{a})$ и $b_\mu = (b_0, \mathbf{b})$ определяется как разность произведения временны́х компонент $a_0 b_0$ и скалярного произведения пространственных компонент $\mathbf{ab}$:

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}.$$

Определения скалярного произведения и квадратов 4-векторов, отражают псевдоевклидовость пространства-времени.

Пространство-время

Некоторое представление о специфике псевдоевклидова пространства-времени дает приведенный здесь простой пример движения по одной пространственной оси. В этом случае события изображаются точками на плоскости x и t (рис. П.9). Линии $x = \pm ct$ разделяют события, отделенные от события в начале координат, пространственноподобными (II, II') и временниподобными (I и III) интервалами.

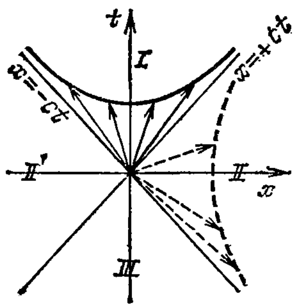

Рис. П.9. Пространство-время. Все сплошные стрелочки соединяют начало координат с событиями, отделенными от начала одинаковым положительным интервалом; штриховые — одинаковым отрицательным интервалом

Казалось бы, две диагонали $x = \pm ct$ определяют ось x и ось t как биссектрисы соответствующих прямых углов и, таким образом, выделяют определенную систему отсчета, связанную с данным событием. Но это не так.

На графике сплошные стрелки — линии одинаковой длины, так как в пространстве-времени длина определяется как квадрат интервала. Для сплошных стрелок этот квадрат положительный, для штриховых — отрицательный. Нам только кажется, что все сплошные линии (или все штриховые линии) имеют разную длину, потому что мы привыкли к евклидову мероопределению. После преобразования Лоренца осевыми ($x = \text{const}$, $t = \text{const}$) становятся другие векторы, но картина в целом сохраняется. Итак, плоскость x, t разбита на области прошлого и будущего и пространственно разделенные (причинно не связанные) части, но это разбиение не мешает относительности движения, не создает выделенной инерциальной системы, как было бы в галилеевой пространственно-временной картине при конечной величине скорости света.

Производная функции одной переменной

Обратимся к хорошо знакомому простому примеру изменения физической характеристики тела — изменению его положения при механическом движении. Такое изменение характеризуется *скоростью движения* тела.

Если движение прямолинейное, и в равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути, то скорость движения постоянна и движение называется *равномерным.*

Если в ходе прямолинейного движения тело проходит неравные отрезки пути в равные промежутки времени, то движение называют *неравномерным.*

Скорость неравномерного движения можно определить по-разному. Можно взять полное перемещение от $\mathbf{x}_1$ до $\mathbf{x}_2$: $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ и, поделив его на $t_2 - t_1$ — полное время движения с t_1 до t_2, определить среднюю скорость движения $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/(t_2 - t_1)$ — скорость, которую имело бы тело, если бы движение было равномерным и прямолинейным. Можно разделить путь на отдельные участки и, поделив перемещение на каждом участке на время прохождения телом этого участка, характеризовать каждый участок своей средней скоростью.

С другой стороны, если нас интересует, какова была скорость движения в тот или иной момент времени, мы должны выбрать столь малый промежуток времени, чтобы в течение этого промежутка времени скорость движения практически не успела измениться. Тогда, поделив перемещение $\Delta\mathbf{r}$, совершенное телом за этот малый промежуток времени, на величину промежутка времени Δt, мы получим скорость, которую тело имело в интересующий нас момент.

Очевидно, что чем меньший промежуток времени Δt мы выберем, тем более точно мы определим скорость движения в интересующий нас момент времени,