скость x, t разбита на области прошлого и будущего и пространственно разделенные (причинно не связанные) части, но это разбиение не мешает относительности движения, не создает выделенной инерциальной системы, как было бы в галилеевой пространственно-временной картине при конечной величине скорости света.

Производная функции одной переменной

Обратимся к хорошо знакомому простому примеру изменения физической характеристики тела — изменению его положения при механическом движении. Такое изменение характеризуется *скоростью движения* тела.

Если движение прямолинейное, и в равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути, то скорость движения постоянна и движение называется *равномерным.*

Если в ходе прямолинейного движения тело проходит неравные отрезки пути в равные промежутки времени, то движение называют *неравномерным.*

Скорость неравномерного движения можно определить по-разному. Можно взять полное перемещение от $\mathbf{x}_1$ до $\mathbf{x}_2$: $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ и, поделив его на $t_2 - t_1$ — полное время движения с t_1 до t_2, определить среднюю скорость движения $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/(t_2 - t_1)$ — скорость, которую имело бы тело, если бы движение было равномерным и прямолинейным. Можно разделить путь на отдельные участки и, поделив перемещение на каждом участке на время прохождения телом этого участка, характеризовать каждый участок своей средней скоростью.

С другой стороны, если нас интересует, какова была скорость движения в тот или иной момент времени, мы должны выбрать столь малый промежуток времени, чтобы в течение этого промежутка времени скорость движения практически не успела измениться. Тогда, поделив перемещение $\Delta\mathbf{r}$, совершенное телом за этот малый промежуток времени, на величину промежутка времени Δt, мы получим скорость, которую тело имело в интересующий нас момент.

Очевидно, что чем меньший промежуток времени Δt мы выберем, тем более точно мы определим скорость движения в интересующий нас момент времени, чем более точно $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ будет характеризовать мгновенную скорость в этот момент. Устремляя величину Δt к нулю, мы получим предел величины отношения $\Delta\mathbf{r}$ к Δt *)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Этот предел называется *первой производной* перемещения по *времени*. Его величина определяет мгновенную скорость тела в интересующий нас момент времени

$$\mathbf{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\equiv\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Определение мгновенной скорости движения связано с математической операцией нахождения первой производной перемещения по времени. Эта математическая операция называется *дифференцированием*. Таким образом, чтобы найти мгновенную скорость движения, надо продифференцировать перемещение по времени.

Перемещение — величина векторная, и характеризуется как числовым значением, так и направлением в пространстве. При прямолинейном движении вектор $\Delta\mathbf{r}$ направлен вдоль прямой, то же направление имеет и вектор скорости. При криволинейном движении направление вектора скорости совпадает с касательной к траектории движения в точке, в которой находится движущееся тело в интересующий нас момент времени.

Если вектор скорости не постоянный, то можно ввести скорость его изменения. Скорость изменения скорости называется *ускорением* **a**. Ускорение — величина векторная **). Вектор ускорения **a** направлен в

---

*) Здесь буквы lim — сокращение от латинского слова limit — предел — означают, что надо взять предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при $\Delta t\to 0$. Заметим, что если сразу взять $\Delta t=0$, то и $\Delta\mathbf{r}=0$, и мы получили бы неопределенную величину 0/0. Поэтому очень важен порядок: *сначала* взять Δt и $\Delta\mathbf{r}$ малые, но не равные нулю, найти отношение этих малых величин и только *потом* устремить Δt к нулю. При этом устремится к нулю и $\Delta\mathbf{r}$, но их отношение устремится к вполне определенной величине. Здесь мы сознательно не рассматриваем различные исключительные случаи, например, скачкообразное движение тела или поведение функции $x=\sqrt{t}$ при $t\to 0$.

**) Это видно из того, что изменение скорости $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ — вектор — делится на скалярную величину Δt.

сторону изменения вектора скорости. При *равноускоренном* движении вектор ускорения постоянный — в равные промежутки времени изменение скорости одинаково и по величине, и по направлению.

Если же за равные промежутки времени изменения скорости неодинаковые, движение — не равномерно ускоренное. В этом случае можно точно так же, как мы это обсуждали выше для скорости неравномерного движения, ввести среднее ускорение на интересующем нас участке пути или в интересующий нас промежуток времени. Для этого надо изменение скорости в данный промежуток времени поделить на величину этого промежутка.

Однако в механике Ньютона наиболее важную роль играет ускорение в данный момент — *мгновенное ускорение*. Именно эта величина, помноженная на массу тела, согласно второму закону Ньютона, определяет силу, действующую на тело в данный момент времени в данной точке пространства и определяющую движение тела.

Аналогично мгновенной скорости мгновенное ускорение определяется как предел отношения вектора приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt, за которое произошло это приращение, при стремлении величины Δt к нулю. Нужно определить мгновенную скорость $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t и мгновенную скорость $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ в момент времени $t+\Delta t$, определить (по правилу сложения векторов) вектор

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t),$$

поделить величину этого вектора на Δt и найти предел отношение $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$.

Этот предел есть первая производная вектора скорости по времени. Этот предел и определяет величину мгновенного ускорения

$$\mathbf{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\equiv\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Заметьте, что для определения мгновенного ускорения надо сделать две операции. Сначала надо найти первую производную от перемещения по времени — мгновенную скорость, а затем надо определить первую производную от мгновенной скорости. Таким образом, мгновенное ускорение определяется двумя последовательными операциями дифференцирования перемещения по времени.

Поэтому мгновенное ускорение определяется второй производной вектора перемещения по времени, что обозначается следующим образом:

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Таким образом, описание простейших изменений — перемещений тела при его движении — неизбежно привлекает математическое понятие производной и математическую операцию — дифференцирование. Изменения состояния движения тела в данный момент времени описываются производными перемещения по времени: первой производной перемещения по времени — скоростью и второй производной перемещения по времени — ускорением.

Закон Ньютона как дифференциальное уравнение

Задавая внешнюю силу как источник изменения состояния движения, второй закон Ньютона связывает силу, действующую на тело в данной точке пространства, с мгновенным ускорением, сообщаемым телу в момент времени, когда тело находится в этой точке. Поскольку мгновенное ускорение есть вторая производная перемещения по времени, закон Ньютона представляет собой уравнение, связывающее вторую производную от перемещения $d^2\mathbf{r}/dt^2$ (ускорение) с функцией положения — внешней силой $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Мы имеем уравнение, в левой и правой части которого стоят векторные величины. Если мы выберем ортогональную (декартову) систему координат, то, спроецировав вектор перемещения и вектор силы на оси X, Y, Z координат, мы получим систему из трех уравнений

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x(\mathbf{r})\,\{=F_x(x,\ y,\ z)\},\\
m\frac{d^2y}{dt^2}&=F_y(\mathbf{r})\,\{=F_y(x,\ y,\ z)\},\qquad (*)\\
m\frac{d^2z}{dt^2}&=F_z(\mathbf{r})\,\{=F_z(x,\ y,\ z)\},
\end{aligned}$$