последовательными операциями дифференцирования перемещения по времени.

Поэтому мгновенное ускорение определяется второй производной вектора перемещения по времени, что обозначается следующим образом:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Таким образом, описание простейших изменений — перемещений тела при его движении — неизбежно привлекает математическое понятие производной и математическую операцию — дифференцирование. Изменения состояния движения тела в данный момент времени описываются производными перемещения по времени: первой производной перемещения по времени — скоростью и второй производной перемещения по времени — ускорением.

Закон Ньютона как дифференциальное уравнение

Задавая внешнюю силу как источник изменения состояния движения, второй закон Ньютона связывает силу, действующую на тело в данной точке пространства, с мгновенным ускорением, сообщаемым телу в момент времени, когда тело находится в этой точке. Поскольку мгновенное ускорение есть вторая производная перемещения по времени, закон Ньютона представляет собой уравнение, связывающее вторую производную от перемещения $d^2\mathbf{r}/dt^2$ (ускорение) с функцией положения — внешней силой $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Мы имеем уравнение, в левой и правой части которого стоят векторные величины. Если мы выберем ортогональную (декартову) систему координат, то, спроецировав вектор перемещения и вектор силы на оси X, Y, Z координат, мы получим систему из трех уравнений

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(\mathbf{r})\,\{= F_x(x, y, z)\}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(\mathbf{r})\,\{= F_y(x, y, z)\}, \qquad (*) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(\mathbf{r})\,\{= F_z(x, y, z)\}, \end{aligned}$$

где F_x, F_y и F_z — проекции вектора силы вдоль осей X, Y и Z. Заметим, что в общем случае сила $\mathbf{F}$ есть функция положения $\mathbf{r}$ скорости $\mathbf{v}$ и времени t. Однако во многих задачах сила есть функция только положения. Например, в 1-м приближении гравитационная сила в небесной механике. Переходя к проекциям вектора положения, мы получаем, что сила оказывается функцией трех независимых переменных — трех координат тела x, y и z, т. е. $F(x, y, z)$. Сама сила — тоже вектор и обладает тремя независимыми проекциями на оси координат. Каждая проекция есть функция положения и, следовательно, трех независимых переменных — трех координат положения тела.

Чтобы решить задачу о том, как движется тело под действием силы, нужно найти координаты тела x, y, z в любой момент времени t. Благодаря закону Ньютона эта задача при известной зависимости силы от расстояния сводится к математической задаче о поиске функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, удовлетворяющих системе уравнений (*). В левую часть этих уравнений входят не сами координаты, а их вторые производные по времени: координаты нужно дважды дифференцировать по времени. Поэтому уравнения механики Ньютона — дифференциальные уравнения. Их называют *обыкновенными дифференциальными уравнениями*, потому что x, y и z зависят только от одной переменной t и в левую часть входят производные только по t. Еще их называют *уравнениями второго порядка*, потому что в них входят вторые производные по времени.

Если есть несколько тел, то закон Ньютона для них записывается в виде системы уравнений

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= F_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t),\\
m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_n \frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2} &= F_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t).
\end{aligned}
$$

Пространственные производные

Если встает вопрос, как меняется физическая величина в интересующий нас момент времени, например, как меняется со временем скорость тела