

производной). При этом, имея в виду трансляции, оказывается достаточным вести основные построения в какой-либо одной фиксированной точке, скажем в единичной точке e .

Упражнения

1. Проверить, что определение подгруппы символически может быть записано в виде $HH^{-1} = H$.

2. Пусть G — группа всех движений в евклидовом пространстве E и H — подгруппа параллельных переносов. Проверить, что H является нормальным делителем в G .

§ 2. Топологические группы

Очень часто встречаются группы, в которых помимо алгебраических операций определяется также естественная топология, т. е. понятие близости (окрестность, предельный переход)*). Группа G называется *топологической*, если в ней определена топология, относительно которой элементы g_1g_2 и g^{-1} непрерывно зависят от (g_1, g_2) и g . Желая сделать это определение несколько более строгим, мы рассматриваем функцию

$$f(g_1, g_2) = g_1g_2^{-1},$$

определенную на множестве всех пар (g_1, g_2) , т. е. на квадрате $G \times G$, и сочетающую в себе обе групповые операции (уможение и взятие обратного элемента). Как обычно, в $G \times G$ вводится естественная топология, определяемая окрестностями вида $U \times V$, где U и V — окрестности в G . Тогда мы можем сказать, что группа G является топологической, если функция $f(g_1, g_2)$ непрерывна на $G \times G$.

Существенно отметить, что *трансляции* (левые и правые) переводят *окрестность в окрестность* (это следует из свойства непрерывности умножения). Отсюда следует также, что система окрестностей единичной точки e порождает после сдвига систему окрестностей произвольной точки $g_0 \in G$.

*) За основными понятиями общей топологии читатель отсыпается к любому руководству по топологии, например к книге Дж. Келли [27]. См. также [22'], [37'], [4], [46].

С топологической точки зрения в первую очередь важно изучить вопросы *дискретности* и *связности*. Топологическое пространство называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей данному пространству*). Топологическое пространство называется *дискретным*, если все его точки изолированные.

Произвольное топологическое пространство распадается, очевидно, в теоретико-множественную сумму своих связных «листов», называемых также *связными компонентами*. Если каждый такой «лист» рассматривать как отдельный элемент, то полученное множество листов естественно топологизируется (см. стр. 62). При этом во многих важных случаях оказывается, что все листы изолированы друг от друга, т. е. пространство листов оказывается дискретным.

Наличие групповой структуры позволяет сразу заключить о наличии простой и общей связи между связными листами топологической группы; в частности, мы увидим, что все эти листы конгруэнтны.

Теорема 1. Пусть G — произвольная топологическая группа и H — ее связная компонента, содержащая единицу. Тогда множество H является в G инвариантной подгруппой и всякий связный лист в группе G (лево- и право-) конгруэнтен H .

Доказательство. Если a и b непрерывно связаны с e путями $a(t)$, $b(t)$, $0 \leq t \leq 1$, то произведение ab также связано с e непрерывным путем $a(t)b(t)$; точно также a^{-1} связано с e непрерывным путем $a(t)^{-1}$. Следовательно, H является подгруппой. Нетрудно видеть, что H инвариантна (каждый путь $a(t)$ заменяется путем $g_0a(t)g_0^{-1}$). Первая часть теоремы доказана.

Далее, пусть G_x — связный лист, содержащий точку x . Легко проверить, что имеет место равенство $G_x = xH = Hx$, т. е. что G_x получается (левой и правой) трансляцией из множества $G_e = H$. Следовательно, G_x конгруэнтно H и все такие листы конгруэнтны между собой.

*) Такие пространства обычно называют *линейно связными*. Относительно другого понятия связности (по Хаусдорфу) см., например [4], [27], [38], [45]. В классе групп Ли оба понятия равносильны.

Замечание 1. Отдельные связные листы $G_x \subset G$ могут быть «занумерованы» точками x при условии, что из каждого такого листа выбирается по единственной точке. При этом, очевидно, только лист $G_e = H$ содержит единицу; следовательно, только этот лист является подгруппой.

Замечание 2. Если точка e в группе G является изолированной, то лист $G_e = H$ состоит из единственной точки e . В этом случае каждый лист G_x состоит из единственной точки x и эта точка изолирована в G , т. е. группа G дискретна.

Перейдем к рассмотрению примеров, иллюстрирующих теорему 1. Для этого нам будет удобно ввести в рассмотрение важный класс групп, называемых *линейными* или *матричными* группами.

Пусть E — линейное пространство размерности n над фиксированным полем Φ . Обычно в качестве Φ мы будем рассматривать поле вещественных чисел \mathbf{R} либо поле комплексных чисел \mathbf{C} . Символом

$$G = \mathrm{GL}(n, \Phi)$$

обозначается группа всех невырожденных аффинных преобразований пространства E . Группа G называется *полной линейной группой* (general linear group). Всякая подгруппа в группе G называется *линейной* или *матричной* группой.

Последнее определение не вызовет неясностей у тех, кому знакома теория матриц. Действительно, пусть $R_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — фиксированный репер в пространстве E . Любое преобразование $g \in G$ вполне определяется репером $R_g = \{ge_1, ge_2, \dots, ge_n\}$, в который оно переводит репер R_e . Раскладывая каждый вектор ge_i по базису R_e , мы получаем матрицу

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

где каждый столбец с номером j содержит координатную запись вектора ge_j (в строке с номером i расположена

жена i -я координата вектора ge_j). При этом, как известно, обычное произведение двух матриц равносильно произведению соответствующих преобразований из группы G .

Пусть M — совокупность всех квадратных матриц $n \times n$ над полем Φ . Полная линейная группа G выделяется из M единственным условием невырожденности:

$$\det g \neq 0.$$

Рассматривая M как евклидово пространство размерности n^2 , мы вносим в M обычную топологию и тем определяем, в частности, топологию в группе G . Нетрудно видеть, что при этом G становится топологической группой.

Пример 1. Группа $G = \mathrm{GL}(1, \Phi)$. Если $\Phi = \mathbf{R}$, то эта группа совпадает с группой вещественных чисел по умножению; если $\Phi = \mathbf{C}$, то эта группа совпадает с группой комплексных чисел по умножению. В первом случае имеем

$$G = G_- + G_+$$

(теоретико-множественная сумма), где G_- содержит только отрицательные и G_+ — только положительные числа. Точка 0 «выкальвается» из условия невырожденности. Ясно, что G_- и G_+ — связные листы группы G .

Во втором случае группа G как множество представляет собой комплексную плоскость с выколотой точкой 0. В этом случае группа связна.

Пример 2. Группа $G = \mathrm{GL}(n, \Phi)$ при произвольном n . Положим сначала $\Phi = \mathbf{R}$. Нетрудно проверить, что два произвольных репера могут быть непрерывно переведены друг в друга только в том случае, когда они имеют одинаковую ориентацию. В частности, репер R_g непрерывно связан с R_e только при $\det g > 0$. В результате

$$G = G_- + G_+,$$

где G_- , G_+ — связные листы, выделяемые условиями $\det g < 0$, $\det g > 0$ соответственно. Лист G_+ является связной компонентой единицы. Лист G конгруэнтен G_+ : $G_- = aG_+ = G_+a$, где a — произвольное преобразование с отрицательным детерминантом.

Если $\Phi = C$, то группа G оказывается связной. Читателю предлагается проверить это утверждение индукцией по n .

Пример 3. Группа всех ортогональных преобразований вещественного евклидова пространства размерности n . Условие ортогональности накладывает на матрицу g ограничение $g'g = e$, где штрих означает транспонирование. Отсюда следует:

$$(\det g)^2 = 1, \quad \det g = \pm 1.$$

Повторяя рассуждения предыдущего примера, заключаем, что группа G по-прежнему распадается на два связных листа, выделяемых условиями $\det g = -1$, $\det g = +1$. Второй из этих листов содержит «собственно ортогональные» преобразования и является связной компонентой единицы.

Пример 4. Группа всех ортогональных преобразований псевдоевклидова пространства с метрикой

$$x^2 = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Пусть $R_e = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ — фиксированный репер, по отношению к которому числа x_i являются координатами вектора x , и пусть $R_g = \{ge_0, ge_1, \dots, ge_n\}$. Если $i = 1, 2, \dots, n$, то векторы ge_i имеют единичную длину, т. е. скользят своими концами по поверхности связного «однополостного» гиперболоида:

$$\Gamma^+: -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

В то же время вектор ge_0 имеет квадратом длины число -1 , т. е. скользит своим концом по поверхности «двуполостного» гиперболоида:

$$\Gamma^-: -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1.$$

Гиперболоид Γ^- несвязен и распадается на два связных листа соответственно условиям $x_0 < 0$, $x_0 > 0$. Подставляя $x = ge_0$, получим неравенства $g_{00} < 0$, $g_{00} > 0$, где g_{ij} — элемент матрицы g в репере R_e . Даже если репер R_g имеет одинаковую ориентацию с R_e , он не может быть непрерывно совмещен с R_e , если $g_{00} < 0$.

В результате заключаем, что группа G распадается на четыре листа:

$$G = G_-^- + G_-^+ + G_+^- + G_+^+,$$

где каждый лист G_ε^δ выделяется одной из возможных комбинаций знаков $\varepsilon = \operatorname{sgn} \det g$, $\delta = \operatorname{sgn} g_{00}$. Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить (индукцией по n), что лист G_+^+ является связным. Следовательно, остальные листы G_ε^δ , когруэнтные G_+^+ , также являются связными. Лист G_+^+ является связной компонентой единицы.

Желая построить еще несколько более общий пример, введем предварительно следующее определение. Пусть F и H — произвольные группы. Рассмотрим множество $G = F \times H$, состоящее из всевозможных пар (f, h) , $f \in F$, $h \in H$, и введем операцию умножения в множестве G по правилу

$$(f_1, h_1)(f_2, h_2) = (f_1 f_2, h_1 h_2).$$

Полученное множество G при этом становится группой, которая называется *прямым произведением* F и H . Если F и H — топологические группы, то множество G снабжается обычной топологией топологического произведения. При этом, как нетрудно видеть, G является топологической группой.

Пример 5. Если в предыдущем построении группа F является дискретной и группа H связной, то мы получаем топологическую группу G , в которой H является связной компонентой единицы.

Замечание. Элементы $f \in F$ в примере 5 могут быть использованы для нумерации связных листов группы G . Соответствующие пары вида (f, e) образуют подгруппу в группе G , изоморфную F ; такие преобразования условимся называть *отражениями*. Нетрудно видеть, что некоторые примеры 1—4 являются частными случаями примера 5 (так, в примере 1 отражения задаются числами ± 1).

Упражнение

Показать, что группа всех унитарных матриц порядка n является связной.