§ 3. Параметрические группы и группы Ли

Мы значительно приблизимся к обычной ситуации анализа, если вместо общих топологических групп введем специальное понятие *параметрической группы*. Группа G называется *параметрической* или *локально евклидовой*, если она параметризуется (хотя бы локально, т. е. в окрестности каждой точки) некоторой системой вещественных параметров

$$g = g(t) = g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

и если при этом закон умножения и взятия обратного элемента выражается непрерывной функцией от набора параметров t. Записывая обе групповые операции в виде $g_1 g_2^{-1}$, мы имеем

$$g(t)\, g(s)^{-1} = g(f(t, s)),$$

где $f(t, s)$ — непрерывная вектор-функция от совокупности переменных t и s. Говоря о том, что множество G параметризуется, мы имеем в виду, как обычно, что G является топологическим или локально евклидовым многообразием.

Таким образом, параметрическая группа представляет собой топологическое многообразие, наделенное групповой структурой, причем эта структура определенным образом согласована с топологией в множестве G (непрерывность $f(t, s)$).

Если мы желаем охватить даже простейшие важные случаи некоммутативных матричных групп, то нет никакой надежды, что параметризация будет глобальной, т. е. единой на всей группе G. Так, если группа G состоит из всех матриц второго порядка

$$g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

с определителем, равным единице, то многообразие G выделяется из четырехмерного евклидова пространства уравнением $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Выбирая α, β, γ в качестве независимых параметров, мы находим

$$\delta = \frac{1}{\alpha}(1 + \beta\gamma),$$

откуда ясно, что полученная параметризация справедлива лишь в тех областях группы G, где $\alpha \neq 0$. Закон умножения в этом случае задается рациональными функциями от α, β, γ.

Как увидим в дальнейшем, ситуация рассмотренного примера является достаточно общей, т. е. в большинстве практически важных случаев удается вложить группу G в объемлющее евклидово пространство и записать закон умножения с помощью рациональных функций. Тем не менее мы должны при развитии общей теории иметь в виду обычные трудности, связанные с локальной параметризацией, т. е. с наложением «евклидова атласа» на многообразие G.

Замечание 1. Если уже известно, что группа G является параметрической, то наложение «евклидова атласа» можно осуществить с помощью (левых или правых) трансляций в группе G. Действительно, выбирая независимые параметры в некоторой окрестности точки e, мы разносим эту окрестность во все остальные точки с помощью сдвигов. Нетрудно проверить, исходя из определения параметрической группы, что мы получаем таким путем непрерывное согласование параметров в тех местах, где карты «атласа» взаимно пересекаются.

Замечание 2. Согласно определению параметрической группы всякая такая группа является *локально связной*, т. е. любая ее точка обладает связной окрестностью. Отсюда следует, в частности, что группа $G = \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Q})$ над полем рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ не является параметрической. Согласно общим концепциям анализа мы придаем особое значение полю $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел.

Сделаем теперь небольшое отступление в область произвольных топологических групп. Множество $S \subset G$ называется *системой образующих* в группе G, если степени S^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(S^0 = \{e\})$, покрывают всю группу G. Следующая теорема подчеркивает роль окрестности в связной группе G.

Теорема 2. *В связной группе G всякая окрестность единичного элемента является системой образующих.*

Доказательство. Фиксируем окрестность U точки e, и пусть G_0 — объединение всех степеней U^m, т. е. множество всех элементов, представимых (вообще говоря, неоднозначно) в виде $u_1 u_2 \ldots u_m$ при некоторых $u_1, u_2, \ldots, u_m \in U$ и при сколь угодно высоком m. Очевидно, G_0 — открытое связное множество в G. Мы покажем, что $G_0 = G$.

Действительно, пусть g_0 — точка, лежащая на границе G. Выберем точку h настолько близкой к единице, чтобы $h^{-1}g_0$ содержалось в G_0 и в то же время h содержалось в окрестности U. Тогда имеем $h^{-1}g_0 = u_1u_2 \ldots u_m$, откуда

$$g_0 = hu_1u_2 \ldots u_m$$

при $h, u_1, u_2, \ldots, u_m \in U$. Следовательно, $g_0 \in G_0$ вопреки предположению о том, что g_0 лежит на границе G_0. Полученное противоречие показывает, что $G_0 = G$. Теорема доказана.

Наконец, введем еще одно фундаментальное определение. Группа G называется *группой Ли*, если она параметрическая и если функция f, задающая закон умножения, вещественно-аналитична *).

Можно было бы ввести понятие группы, несколько раз дифференцируемой, однако существует следующая замечательная теорема: *всякая параметрическая группа в действительности является группой Ли*. Эта теорема является решением знаменитой V проблемы Гильберта. Мы не можем в рамках данной книги останавливаться на доказательстве этой теоремы (см. [36]). Смысл ее состоит в том, что групповая структура позволяет получить замечательные следствия в терминах анализа: непрерывность функции f оказывается достаточной для ее аналитичности.

Простейшим аналогом такой ситуации является решение функционального уравнения

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

в классе непрерывных функций на числовой прямой. Как известно, это уравнение имеет лишь экспоненциальные решения:

$$f(x) = Ce^{ax},$$

которые аналитичны. Аналогичный результат имеет место и в классе непрерывных матричных функций $f(x)$.

Существенно важными объектами в теории групп Ли являются, естественно, лишь связные группы Ли. Такие группы называются также *аналитическими группами*.

---

*) Функция f называется вещественно-аналитической, если она представима в виде локального степенного ряда (ряда Тейлора) в окрестности каждой точки из области определения.

Аналитическая группа представляет собой аналитическое многообразие, наделенное групповой структурой, при условии известной согласованности этой структуры со структурой аналитического многообразия (аналитичность $f(t, s)$). Более подробное определение аналитической группы и группы Ли можно найти в монографиях [38], [45], [46].

§ 4. Теория Ли

Как уже отмечалось во введении, первоначальные результаты по теории групп Ли принадлежат норвежскому математику Софусу Ли. Однако в действительности Софус Ли изучал лишь некоторые группы диффеоморфизмов (гладких точечных преобразований) и все рассмотрения проводил локально. С современной точки зрения результаты Ли естественно формулируются для так называемых *локальных групп Ли*, определение которых будет дано несколько ниже.

Не имея возможности сколько-нибудь подробно остановиться на систематическом изложении теории Ли, мы ограничимся лишь кратким ее обзором и иллюстрацией следующего основного положения: *теория Ли устанавливает замечательное соответствие между группами Ли и значительно более простыми алгебраическими объектами — так называемыми алгебрами Ли.*

Коль скоро в группе есть понятия дифференцируемости и даже аналитичности, мы можем изучать строение группы локально, пренебрегая малыми величинами того или иного порядка; при этом в силу свойства однородности достаточно рассматривать окрестность единичного элемента e. Согласно общим принципам анализа мы прежде всего осуществляем линеаризацию, т. е. рассматриваем касательное пространство к многообразию G в точке e (конструкция касательного пространства становится особенно наглядной, если G является гиперповерхностью в объемлющем евклидовом пространстве)*). Полученное линейное пространство X яв-

*) Относительно основных понятий дифференциальной геометрии см., например, [40], [39'].