Упражнения

1. Показать, что если алгебра Ли X коммутативна, то $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in X$.

2. Показать, что трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно операции векторного произведения.

3. Показать, что операторы $p = \frac{d}{dx}$, $q = x$ (умножение на x), $r = 1$ и их линейные комбинации образуют алгебру Ли.

4. Показать, что группа $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ является группой Ли.

5. Показать, что группа $\mathrm{O}(n)$ является группой Ли.

§ 5. Локально изоморфные группы Ли

В этом параграфе мы займемся вопросом о возможности восстановления всей группы Ли по соответствующей алгебре Ли. Предварительно остановимся на некоторых общих определениях.

Пусть A и B — две произвольные группы. Отображение $b = f(a)$, $a \in A$, $b \in B$, называется *гомоморфизмом* группы A в группу B, если

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2),$$

т. е. если $f(a)$ «сохраняет умножение». Пусть e, e' — единичные элементы в A и B соответственно. Покажем, что $f(e) = e'$. Действительно,

$$f(e) = f(ee) = f(e) f(e);$$

умножая обе части на левый обратный элемент к $f(e)$, получаем $f(e) = e'$. Нетрудно также видеть, что $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ для всякого $x \in A$.

Если группы A, B топологические, то предполагается также, что функция $b = f(a)$ является непрерывной. Если гомоморфизм f накрывает всю группу B, то говорят, что f является гомоморфизмом группы A *на* группу B. Если при этом отображение f взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то оно называется *изоморфизмом*. Изморфные группы не считаются существенно различными.

Остановимся несколько подробнее на алгебраических свойствах гомоморфизма. Пусть E — множество всех $x \in A$, для которых $f(x) = e'$; множество E называется *ядром* гомоморфизма f. Покажем, что знание

ядра определяет «степень вырождения» гомоморфизма f во всякой точке $a \in A$.

Теорема 3. *Пусть f — гомоморфизм группы A в группу B и E — его ядро. Множество E является инвариантной подгруппой в A. Далее,*

$$f^{-1}(b) = aE = Ea$$

для всякой точки $b \in B$, где a — произвольно фиксированный элемент, для которого $f(a) = b$.

Доказательство. Первое утверждение легко проверяется. Далее, если a, a' — произвольные элементы из $f^{-1}(b)$, то $f(a^{-1}a') = e'$, откуда $a^{-1}a' \in E$. Следовательно,

$$a' = ax,$$

где a фиксировано и x пробегает E. Очевидно, эта формула дает общий вид элементов $a' \in f^{-1}(b)$. Точно так же $a' = ya$, где y пробегает E. Теорема доказана.

Следствие. *Гомоморфизм f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ядро состоит из единицы.*

Пример 1. Пусть A — аддитивная группа векторов (x, y) на плоскости и B — аддитивная группа чисел на прямой. Отображение

$$f(x, y) = x$$

является гомоморфизмом A на B. Ядро такого гомоморфизма определяется условием $x = 0$, т. е. совпадает с осью Oy. Всякое множество $f^{-1}(x_0)$ есть прямая линия, параллельная Oy.

Пример 2. Пусть A — аддитивная группа чисел на прямой и B — мультипликативная группа комплексных чисел, лежащих на единичной окружности. Отображение

$$f(x) = e^{ix}$$

является гомоморфизмом A на B. Ядром такого гомоморфизма является множество всех чисел вида $2\pi n$, где n — произвольное целое число.

Пример 3. Конструкция примера 2 легко обобщается на случай, когда группа A изоморфна произвольному векторному пространству конечной размерности.

В частности, пусть A двумерно и состоит из векторов (x, y). Положим

$$f(x, y) = \begin{Vmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{iy} \end{Vmatrix}.$$

Тогда отображение f является гомоморфизмом A на группу B диагональных матриц второго порядка с собственными значениями, по модулю равными единице. Ядро гомоморфизма f составляют пары $(2\pi n_1, 2\pi n_2)$, где n_1, n_2 — произвольные целые числа.

Замечание 1. Группа B в примере 3 изоморфна двумерному тору и как группа совпадает с группой движений этого тора.

Замечание 2. Если группы A и B являются векторными пространствами, то понятие гомоморфизма совпадает в этом случае с понятием аддитивного оператора.

Вернемся теперь к теории групп Ли. Две топологические группы A и B называются *локально изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f между окрестностями единичных элементов $U \subset A$, $V \subset B$, которое переводит единицу в единицу и сохраняет закон умножения внутри окрестностей U, V. Последнее означает, что

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2),$$

если a_1, a_2, $a_1 a_2 \in U$, и то же верно для обратного отображения f^{-1}, определенного на окрестности V. В частности, если группы A и B изоморфны, то они и локально изоморфны, в то время как обратное, вообще говоря, неверно. Две группы Ли, очевидно, могут быть локально изоморфны только в том случае, когда они имеют одинаковую размерность.

Примерами локально изоморфных групп являются группы A и B, рассмотренные в этом параграфе в примерах 2 и 3. Группы A и B в примере 1 не могут быть локально изоморфными, поскольку имеют разную размерность.

Если две группы Ли локально изоморфны, то они имеют, очевидно, одну и ту же алгебру Ли. Обратно, если группы A и B имеют одну и ту же алгебру Ли, то,

согласно теории Ли, они локально изоморфны. Следовательно, можно заключить, что *алгебра Ли определяет группу Ли с точностью до локального изоморфизма.*

Замечание. Множество Ω назовем *локальной группой Ли*, если оно топологически отождествляется с некоторой окрестностью n-мерного векторного пространства и если в нем введена групповая операция gh^{-1}, аналитическая в параметрах Ω и определенная для точек g и h, достаточно близких к единице. Вся теория Ли может быть переформулирована для локальных групп Ли; при этом локальная группа Ω уже однозначно определяется своей алгеброй X.

В дальнейшем мы условимся рассматривать лишь конечномерные алгебры Ли, опуская для краткости слово «конечномерные». Если X — такая алгебра, то мы введем обозначение $\omega(X)$ для множества всех аналитических групп, имеющих X своей алгеброй Ли. При этом две группы считаются одинаковыми, если они изоморфны. Согласно сказанному выше все группы класса $\omega(X)$ локально изоморфны. Проблема состоит в описании класса $\omega(X)$.

Прежде всего, возникает вопрос, является ли класс $\omega(X)$ непустым для произвольной алгебры X. Ответ является положительным, но его доказательство слишком сложно. Мы наметим идею доказательства в § 107. Далее, имеет место

Теорема D. *В каждом классе $\omega(X)$ существует «максимальная» группа $\mathfrak{G}$, определяемая однозначно. Максимальность означает, что всякая группа $G \in \omega(X)$ является гомоморфным образом $\mathfrak{G}$:*

$$G = f(\mathfrak{G}).$$

Идея доказательства этой теоремы состоит в построении «накрывающего многообразия» для каждой группы $G \in \omega(X)$. Понятие накрывающего многообразия в топологии основано на той же идее, что и понятие римановой поверхности в теории функций комплексного переменного. Мы не станем воспроизводить подробности этого определения, отсылая читателя к руководствам по общей топологии либо к книге Шевалле [46] (т. I, стр. 61). Известно, что если G — связное многообразие, каждая точка которого обладает базисной системой связных окрестностей, то среди многообразий, накрывающих

G, существует максимальное многообразие $\mathfrak{G}$ (см. [46]). Максимальность означает при этом, что всякое накрытие $\mathfrak{G}$ гомеоморфно $\mathfrak{G}$. Если G — группа, то многообразие $\mathfrak{G}$ также наделяется структурой группы, причем группа G является гомоморфным образом $\mathfrak{G}$. Если группы G_1, G_2 локально изоморфны, то их накрывающие оказываются изоморфными.

Указанное выше многообразие $\mathfrak{G}$ может быть также однозначно охарактеризовано свойством *односвязности*. Это означает, что всякий замкнутый цикл в многообразии $\mathfrak{G}$ может быть стянут в точку непрерывной деформацией в $\mathfrak{G}$. (В частности, прямая односвязна, а окружность неодносвязна, причем прямая является накрывающим многообразием для окружности.) Таким образом, группа $\mathfrak{G}$ из теоремы D является односвязной. Она называется *универсальной накрывающей класса* $\omega(X)$.

Следствие 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между алгебрами Ли и односвязными группами Ли.*

Следствие 2. *Две группы Ли локально изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же универсальную накрывающую.*

Рассмотрим в качестве простейшего примера тот случай, когда алгебра X одномерна. Очевидно, в этом случае X коммутативна. Роль универсальной накрывающей класса $\omega(X)$ играет аддитивная группа вещественных чисел (группа сдвигов на прямой). Элементом класса $\omega(X)$ является также мультипликативная группа комплексных чисел $e^{i\varphi}$ (группа вращений окружности). Если рассматривать каждую группу с точностью до изоморфизма, то легко показать (см. упражнение 2 в конце параграфа), что указанными двумя группами исчерпывается в данном случае весь класс $\omega(X)$.

Таким образом, теорема D в известном смысле завершает теорию групп Ли. Мы сделаем, однако, еще одно простое замечание, которое позволит уяснить структуру формулы

$$G = f(\mathfrak{G}),$$

указанной в теореме D. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная группа. Всякий элемент $z \in \mathfrak{G}$, перестановочный со всеми элементами из $\mathfrak{G}$, называется *центральным*. Множество всех центральных элементов называется *центром* группы $\mathfrak{G}$.

Теорема 4. *Ядро гомоморфизма f, указанного в теореме* D, *является дискретным и содержится в центре группы* $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Пусть E — ядро гомоморфизма f. Из непрерывности f следует замкнутость E. Подгруппа E, как замкнутая подгруппа в группе Ли, сама является группой Ли. Однако E не может содержать ни одной однопараметрической подгруппы, поскольку f взаимно однозначно в окрестности точки e. Следовательно, E дискретно.

Далее, для каждого $x \in E$ введем «орбиту» O_x как совокупность всех элементов вида gxg^{-1}, $g \in \mathfrak{G}$; тогда $O_x \subset E$, поскольку E инвариантно относительно внутренних автоморфизмов. Всякая орбита является связной в силу связности $\mathfrak{G}$ и в то же время дискретной ввиду дискретности E. Это может быть только тогда, когда O_x состоит из единственной точки x. Следовательно, $gxg^{-1} = x$ при всех $g \in \mathfrak{G}$ и всякий элемент $x \in E$ является центральным. Теорема доказана.

Следствие. *Для перечисления всех групп класса $\omega(X)$ достаточно перечислить подгруппы, лежащие в центре группы* $\mathfrak{G}$.

Дискретные подгруппы, лежащие в центре группы $\mathfrak{G}$, мы будем также называть *дискретными делителями* группы $\mathfrak{G}$. Если $G = f(\mathfrak{G})$, $f^{-1}(e) = Z$, где $\mathfrak{G}$ — односвязная подгруппа и Z — ее дискретный делитель, то Z называется *фундаментальной группой* или *группой Пуанкаре* многообразия G. Фундаментальная группа показывает «степень неодносвязности» многообразия G.

Упражнения

1. Пусть $\mathcal{G}$ — векторное пространство размерности n. Показать, что всякая дискретная подгруппа в группе $\mathcal{G}$ имеет вид дискретной решетки $n_1e_1 + n_2e_2 + \ldots + n_ke_k$, где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — линейно независимые векторы ($k \leqslant n$) и $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — произвольные целые числа.

2. Показать, что всякая коммутативная связная группа Ли изоморфна прямому произведению k-мерного тора на $(n-k)$-мерное векторное пространство. (Указание: воспользуемся результатом упражнения 1.)

§ 6. Инвариантные формы на группе Ли

Пусть G — группа Ли с локальными параметрами $t=(t^1, t^2, \ldots, t^n)$ в окрестности точки e. Мы будем рассматривать правые сдвиги $g \to gg_0$ как аналитические преобразования этих координат при условии, что точки g, g_0, gg_0 достаточно близки к единице. Если t, σ, τ — соответственно параметры этих точек, то мы имеем $\tau=\varphi(t, \sigma)$, где φ — аналитическая функция от t и σ. Далее,

$$d\tau = A(\tau, t)\,dt,$$

где $A(\tau, t)$ — матричная функция, составленная из частных производных $\partial\varphi^i(t, \sigma)/\partial t^k$; при этом мы считаем τ, t независимыми переменными, подбирая σ из соотношения между τ, t и σ. Очевидно, матрица $A(\tau, t)$ аналитически зависит от своих переменных. Далее, она невырождена, поскольку ее детерминант совпадает с якобианом взаимно однозначного преобразования $g \to gg_0$. Повторное применение операции сдвига приводит нас к формуле

$$A(\tilde{t}, \tau)A(\tau, t) = A(\tilde{t}, t),$$

справедливой при достаточно малых значениях входящих в нее параметров. Матрицу $A(\tau, t)$ мы будем называть *трансформационной матрицей правого сдвига*. Аналогично можно было бы рассматривать левые сдвиги на G.

Пусть $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ — векторная функция на группе G, т. е. векторное поле, выраженное через локальные координаты. Векторное поле $a(t)$ мы будем называть *ковариантным*, если

$$a(\tau)A(\tau, t) = a(t) \qquad (*)$$

для всякого правого сдвига на G. Хотя такое определение является локальным, его нетрудно при помощи атласа перенести на всю группу G. (Аналогично можно