2. Показать, что всякая коммутативная связная группа Ли изоморфна прямому произведению k-мерного тора на $(n-k)$-мерное векторное пространство. (Указание: воспользуемся результатом упражнения 1.)

§ 6. Инвариантные формы на группе Ли

Пусть G — группа Ли с локальными параметрами $t=(t^1, t^2, \ldots, t^n)$ в окрестности точки e. Мы будем рассматривать правые сдвиги $g \to gg_0$ как аналитические преобразования этих координат при условии, что точки g, g_0, gg_0 достаточно близки к единице. Если t, σ, τ — соответственно параметры этих точек, то мы имеем $\tau=\varphi(t, \sigma)$, где φ — аналитическая функция от t и σ. Далее,

$$d\tau = A(\tau, t)\,dt,$$

где $A(\tau, t)$ — матричная функция, составленная из частных производных $\partial\varphi^i(t, \sigma)/\partial t^k$; при этом мы считаем τ, t независимыми переменными, подбирая σ из соотношения между τ, t и σ. Очевидно, матрица $A(\tau, t)$ аналитически зависит от своих переменных. Далее, она невырождена, поскольку ее детерминант совпадает с якобианом взаимно однозначного преобразования $g \to gg_0$. Повторное применение операции сдвига приводит нас к формуле

$$A(\tilde{t}, \tau)A(\tau, t) = A(\tilde{t}, t),$$

справедливой при достаточно малых значениях входящих в нее параметров. Матрицу $A(\tau, t)$ мы будем называть *трансформационной матрицей правого сдвига*. Аналогично можно было бы рассматривать левые сдвиги на G.

Пусть $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ — векторная функция на группе G, т. е. векторное поле, выраженное через локальные координаты. Векторное поле $a(t)$ мы будем называть *ковариантным*, если

$$a(\tau)A(\tau, t) = a(t) \qquad (*)$$

для всякого правого сдвига на G. Хотя такое определение является локальным, его нетрудно при помощи атласа перенести на всю группу G. (Аналогично можно

определить контравариантное векторное поле по правилу $A(\tau, t)b(t) = b(\tau)$.)

Пусть $a(t)$ — произвольное векторное поле на G. Записывая $a(t)$ как вектор-строку и dt как вектор-столбец, мы рассмотрим свертку

$$\omega(t, dt) = a(t)\,dt,$$

которая дает нам общий вид *линейной дифференциальной формы* на многообразии G. Форма $\omega(t, dt)$ называется *правоинвариантной*, если

$$\omega(\tau, d\tau) = \omega(t, dt),$$

где τ — координаты новой точки, получаемой при сдвиге gg_0. Легко проверить, что форма ω инвариантна тогда и только тогда, когда поле $a(t)$ является ковариантным.

В результате мы приходим к эквивалентному определению понятия ковариантности. Аналогично можно было бы рассмотреть левые сдвиги на G. Докажем теперь следующий основной результат:

Теорема 5. *На группе Ли размерности n существует ровно n линейно независимых правоинвариантных и ровно n линейно независимых левоинвариантных форм. Коэффициенты этих форм являются аналитическими функциями на G.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим правые сдвиги. Условимся, что $t = 0$ соответствует единичной точке e. Согласно определению ковариантности имеем, в частности,

$$a(t) = a(0)A(0, t).$$

Заменим множитель $a(0)$ произвольным постоянным вектором c и покажем, что полученное векторное поле является ковариантным. Действительно, согласно свойствам трансформационной матрицы мы имеем

$$a(\tau)A(\tau, t) = cA(0, \tau)A(\tau, t) = cA(0, t) = a(t).$$

Мы показали, что общий вид ковариантного векторного поля на группе G дается формулой

$$a(t) = cA(0, t),$$

где c — произвольный постоянный вектор. Отсюда, в частности, следует аналитичность функции $a(t)$. Поскольку вектор c пробегает n-мерное пространство и матрица $A(0, t)$ невырождена, мы действительно получаем ровно n линейно независимых решений. Теорема доказана.

Замечание. Идея доказательства вкратце сводится к тому, что произвольный фиксированный вектор $c = a(0)$ «разносится» определенным образом по группе G. В действительности наше доказательство требует большей строгости при рассмотрении «атласа» на группе G.

Для иллюстрации рассмотрим случай матричной группы и независимо получим в этом случае результат теоремы 5. Если g — произвольная матрица, то символом dg мы обозначим матрицу, составленную из дифференциалов всех элементов матрицы g. Положим

$$\omega(g, dg) = dg \cdot g^{-1}.$$

Рассматривая правый сдвиг, положим $h = gg_0$. Тогда $dh = dg \cdot g_0$, откуда $dh \cdot h^{-1} = dg \cdot g^{-1}$. Следовательно, матрица $\omega(g, dg)$ является правоинвариантной. Заметим, что элементами этой матрицы являются дифференциальные формы на G. Число линейно независимых среди этих форм, очевидно, равно числу параметров в группе G.

Аналогично матрица $\tilde{\omega}(g, dg) = g^{-1}dg$ является левоинвариантной и содержит нужное число линейно независимых дифференциальных форм.

До сих пор мы рассматривали лишь дифференциальные формы первого порядка, однако наши рассмотрения, очевидно, без труда переносятся на формы любого порядка. Соответственно мы получаем описание ковариантных и контравариантных тензорных полей на группе G.

§ 7. Метрика. Мера Хаара

Используя идеи предыдущего параграфа, мы получаем, в частности, что справедлива следующая *)

*) По поводу терминологии теории римановых пространств см., например, [29], [39′].