

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Мы уже ввели понятие линейной группы в предыдущей главе. Линейные группы являются важнейшим объектом изучения в теории групп Ли. Они имеют принципиальное значение также в геометрии и теоретической физике.

§ 8. Полная линейная группа. Экспоненциал

Абстрактное множество A называется *алгеброй*, если оно является линейным пространством с ассоциативным умножением, причем сложение и умножение связаны обычным дистрибутивным законом. Говорят, что алгебра A является алгеброй с единицей, если в ней существует элемент e , для которого $ea = ae = a$ при любом $a \in A$. Множество всех обратимых элементов в алгебре A с единицей, очевидно, является группой. Если, в частности, A — алгебра всех матриц n -го порядка, то таким путем возникает полная линейная группа $GL(n, \Phi)$.

В качестве поля Φ мы обычно условимся рассматривать **R** или **C** . Если ясно, о каком поле идет речь, то мы условимся для краткости обозначать полную линейную группу символом $GL(n)$. Под топологией в $GL(n)$ мы будем всегда понимать топологию объемлющего линейного пространства A .

Мы уже использовали в гл. I понятие матричной экспоненты. Этую экспоненту условимся обозначать символом e^x или $\exp x$. Имеем

$$\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y),$$

если матрицы x, y перестановочны (в общем случае это не так). Доказательство легко получить перемножением

двух рядов. Функция $g = \exp x$ доставляет нам канонические координаты в группе $GL(n)$.

Теорема 1. Экспоненциальное отображение $g = \exp x$, $x \in A$, накрывает всю группу $GL(n)$ над комплексным полем C .

Доказательство. Воспользуемся нормальной жордановой формой матрицы g . Согласно теории элементарных делителей матрица g в некотором базисе может быть приведена к диагонально-блочному виду с блоками вида

$$g_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где λ_i — диагональная матрица с единственным собственным значением и z_i — треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Ограничевшись отдельным блоком, мы запишем его в виде

$$g = \lambda z,$$

где матрица λ кратна единице и матрица z описана выше. Заметим, что $z = e + \xi$, где матрица ξ нульстепенна ($\xi^m = 0$ при достаточно большом m). Отсюда следует, что логарифм матрицы z может быть определен в виде конечного степенного ряда. В результате

$$z = \exp \tau,$$

где матрица τ нульстепенна. В то же время матрица λ также может быть записана в виде экспоненты $\exp h$. Поскольку матрица h кратна единичной, она перестановочна с τ . В результате имеем

$$g = \exp h \cdot \exp \tau = \exp(h + \tau).$$

Мы показали, что всякая матрица $g \in GL(n, C)$ может быть записана в виде экспоненты. Теорема доказана.

Замечание. Над вещественным полем подобная теорема неверна, поскольку даже диагональная матрица λ с отрицательными собственными значениями, вообще говоря, не может быть записана в виде экспоненты. Экспоненциальное отображение накрывает лишь некоторую область в $GL(n, R)$.

В дальнейшем иногда мы будем использовать хорошо известную формулу Якоби:

$$\det e^x = e^{\operatorname{sp} x}.$$

Здесь $\operatorname{sp} x$ означает след матрицы x , т. е. сумму ее диагональных элементов. (Поскольку детерминант и след не зависят от выбора базиса, то достаточно проверить справедливость этой формулы в том базисе, где матрица x треугольна. Существование такого базиса хорошо известно из теории матриц.) В частности, если $\det e^{\lambda x} = 1$, $-\infty < \lambda < \infty$, то мы имеем

$$\operatorname{sp} x = 0.$$

Множество всех матриц порядка n с детерминантом, равным единице, обозначается символом $SL(n)$. Это множество является группой и носит название *униодулярной группы порядка n* ^{*}.

Согласно общим конструкциям гл. I мы можем заключить, что алгебра Ли $GL(n)$ совпадает по запасу элементов со всей алгеброй A квадратных матриц $n \times n$. Очевидно также, что алгебра Ли $SL(n)$ выделяется единственным условием $\operatorname{sp} x = 0$. Мы обозначим эти алгебры строчными символами $gl(n)$, $sl(n)$ соответственно.

Согласно общей теории групп Ли всякая замкнутая подгруппа в $GL(n)$ снова является группой Ли. Если X — соответствующая алгебра Ли, то $X \subset A$ и коммутатор в X выражается обычной формулой $[x, y] = xy - yx$. Различные алгебры Ли отличаются в этом случае лишь по запасу элементов. Такие алгебры иногда называются также *линейными алгебрами Ли*.

§ 9. Полная линейная группа. Основные разложения

Мы отметим в этом параграфе некоторые способы параметризации полной линейной группы $G = GL(n, \mathbf{C})$. Все они связаны с некоторыми мультипликативными разложениями в группе G . С соответствующими изме-

^{*}) Расшифровка обозначения $SL(n)$ — «special linear group».