В дальнейшем иногда мы будем использовать хорошо известную формулу Якоби:

$$\det e^x = e^{\operatorname{sp} x}.$$

Здесь $\operatorname{sp} x$ означает след матрицы x, т. е. сумму ее диагональных элементов. (Поскольку детерминант и след не зависят от выбора базиса, то достаточно проверить справедливость этой формулы в том базисе, где матрица x треугольна. Существование такого базиса хорошо известно из теории матриц.) В частности, если $\det e^{\lambda x} = 1$, $-\infty < \lambda < \infty$, то мы имеем

$$\operatorname{sp} x = 0.$$

Множество всех матриц порядка n с детерминантом, равным единице, обозначается символом $\mathrm{SL}(n)$. Это множество является группой и носит название *унимодулярной группы порядка* n *).

Согласно общим конструкциям гл. I мы можем заключить, что алгебра Ли $\mathrm{GL}(n)$ совпадает по запасу элементов со всей алгеброй A квадратных матриц $n \times n$ Очевидно также, что алгебра Ли $\mathrm{SL}(n)$ выделяется единственным условием $\operatorname{sp} x = 0$. Мы обозначим эти алгебры строчными символами $\mathrm{gl}(n)$, $\mathrm{sl}(n)$ соответственно

Согласно общей теории групп Ли всякая замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n)$ снова является группой Ли. Если X — соответствующая алгебра Ли, то $X \subset A$ и коммутатор в X выражается обычной формулой $[x, y] = xy - yx$. Различные алгебры Ли отличаются в этом случае лишь по запасу элементов. Такие алгебры иногда называются также *линейными алгебрами Ли*.

§ 9. Полная линейная группа. Основные разложения

Мы отметим в этом параграфе некоторые способы параметризации полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$. Все они связаны с некоторыми мультипликативными разложениями в группе G. С соответствующими изме-

*) Расшифровка обозначения $\mathrm{SL}(n)$ — «special linear group».

нениями результаты остаются верными также и для вещественного поля.

А. Полярное разложение. Введем операцию эрмитова сопряжения по формуле $a^* = \bar{a}'$, где штрих означает транспонирование матрицы a и черта — комплексное сопряжение. Заметим, что

$$(ab)^* = b^*a^*.$$

Матрица h называется *эрмитовой* или *самосопряженной*, если $h^* = h$. Матрица u называется *унитарной*, если $u^* = u^{-1}$. Матрица p называется *положительно определенной*, если форма

$$p(\xi) = p_{ij}\xi^i\bar{\xi}_j$$

положительно определена. Эрмитова матрица является положительно определенной в том и только том случае, когда все ее собственные значения положительны.

Теорема 2. *$G = RU$, где R — множество всех положительно определенных эрмитовых матриц и $U = \mathrm{U}(n)$ — группа всех унитарных матриц порядка n. Индивидуальное разложение $g = ru$, $r \in R$, $u \in U$, однозначно.*

Доказательство. Если матрица g обратима, то матрицы g^* и $p = gg^*$ также обратимы (ибо $\det g^* = \overline{\det g}$). Легко проверить, что $p \in R$. Следовательно, $p = r^2$, где $r \in R$ (достаточно использовать тот базис, в котором p диагональна). Полагая $u = r^{-1}g$, находим

$$uu^* = r^{-1}gg^*r^{-1} = e.$$

Следовательно, матрица u унитарна и $g = ru$. Если матрица g допускает какое-либо иное разложение такого типа, скажем $g = r_1u_1$, то по-прежнему $r_1^2 = gg^* = p$, откуда следует, что $r_1 = r$, ввиду однозначности извлечения корня в R. Следовательно, также $u_1 = u$. Теорема доказана.

Разложение $g = ru$, $r \in R$, $u \in U$, называется *полярным разложением*. Оно обобщает разложение комплексного числа в произведение модуля на унитарное число вида $e^{i\varphi}$. При переходе к вещественному полю эрмитовость заменяется симметричностью и унитарность — ортогональностью.

В. Разложение Гаусса. Пусть $D = D(n)$ — множество всех диагональных матриц из G (относительно фиксированного базиса):

$$\delta = \begin{Vmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n \end{Vmatrix}.$$

Пусть $Z_- = Z_-(n)$, $Z_+ = Z_+(n)$ — соответственно множества всех нижних и верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали:

$$\zeta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Все эти множества являются группами. Далее, пусть Δ_i — диагональный минор матрицы g, составленный из первых i строк и первых i столбцов. Докажем, что имеет место

Теорема 3. *Если миноры Δ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы g отличны от нуля, то g разлагается, причем единственным образом, в произведение вида*

$$g = \zeta\delta z, \quad \zeta \in Z_-, \quad \delta \in D, \quad z \in Z_+.$$

Элементы сомножителей ζ, δ, z выражаются рационально через элементы матрицы g. Множество $G_0 = Z_-DZ_+$ открыто и всюду плотно в группе G.

Доказательство. Умножим матрицу g справа на $x \in Z_+$ и выпишем систему уравнений $(gx)_{ij} = 0$ при $i < j$:

$$\sum_{k=1}^{i} g_{ik}x_{kj} = 0, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

которые выражают нижнюю треугольность матрицы gx. Легко проверить, что детерминант такой системы при фиксированном i совпадает с Δ_i. Следовательно, эта система разрешима, и, заменяя x на z^{-1}, мы имеем

$$g = kz;$$

где матрица k является нижней треугольной. Очевидно, всякая такая матрица может быть записана в виде $\zeta\delta$, где $\zeta \in Z_-$, $\delta \in D$.

Далее, пусть $g^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p}$ означает минор матрицы g, составленный из строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_p$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_p$. Легко находим по правилу умножения миноров

$$g^{1\,2 \dots p-1\,p}_{1\,2 \dots p-1\,q} = \Delta_p z_{pq},$$

где $\Delta_p = k_{11}k_{22} \dots k_{pp} = \delta_1\delta_2 \dots \delta_p$. Отсюда, в частности, при $p = q$ получается выражение для собственных значений δ_p и при $p < q$ — выражение для элементов z_{pq}. Обозначая минор, стоящий слева, через Δ_{pq}, находим

$$z_{pq} = \frac{\Delta_{pq}}{\Delta_p}, \qquad p < q.$$

Аналогично вычисляя ζ, находим $\zeta_{pq} = \Delta'_{pq}/\Delta_q$, где для краткости положено $\Delta'_{pq} = g^{1\,2 \dots q-1\,p}_{1\,2 \dots q-1\,q}$. Заметим также, что

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}}, \qquad p = 1, 2, \dots, n,$$

где положено $\Delta_0 = 1$.

Остается доказать единственность полученного разложения. Если $g = k_1 z_1 = k_2 z_2$, то $k_1^{-1}k_2 = z_1 z_2^{-1}$, что возможно только в том случае, когда $k_1 = k_2$, $z_1 = z_2$. Впрочем, единственность следует также из приведенного выше явного вычисления параметров ζ, δ, z.

Множество $G_0 = Z_- D Z_+$ получается выбрасыванием из G многообразия меньшей размерности (это многообразие определяется как объединение гиперповерхностей $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$). Следовательно, G_0 открыто и всюду плотно в G. Теорема доказана.

Разложение теоремы 3 мы будем называть *разложением Гаусса* (Гаусс использовал его для рекуррентного решения системы линейных уравнений). Заметим, что G_0 содержит единичную точку e, а потому и некоторую окрестность точки e. Всякую точку $g \in G_0$ мы будем называть *регулярной* и множество G_0 обозначать также символом G_{reg}.

С. Разложение Грама. Пусть E означает совокупность всех диагональных положительно определенных матриц. Докажем, что имеет место

Теорема 4. *$G = Z_- EU$. Индивидуальное разложение $g = \zeta\varepsilon u$, $\varepsilon \in E$, $\zeta \in Z_-$, $u \in U$, однозначно.*

Доказательство. Согласно критерию Сильвестра всякая положительно определенная матрица содержится в G_{reg}. В частности, матрица $p = gg^*$ допускает разложение Гаусса: $p = \zeta\delta z$, причем из эрмитовости p и единственности разложения Гаусса следуют равенства

$$\zeta = z^*, \quad \delta = \delta^*, \quad z = \zeta^*.$$

Кроме того, матрица δ является положительно определенной. Следовательно, $\delta = \varepsilon^2$, $\varepsilon \in R$. Полагая $t = \zeta\varepsilon$, мы запишем матрицу p в виде tt^* и положим $u = t^{-1}g$. Тогда имеем

$$uu^* = t^{-1}gg^*t^{*-1} = e,$$

откуда следует, что матрица u унитарна. В результате $g = tu = \zeta\varepsilon u$. Единственность этого разложения устанавливается таким же способом, как при доказательстве теоремы 3. Теорема доказана.

Разложение теоремы 4 мы условимся называть *разложением Грама*. Оно выражает процесс «ортогонализации» произвольной матрицы $g \in G$ при помощи треугольного сомножителя $t = \zeta\varepsilon$. Пусть T — множество всех таких треугольных матриц (с положительными собственными значениями). Тогда мы имеем

$$\mathrm{GL}(n) = T \cdot \mathrm{U}(n)$$

Заметим также (это ясно из доказательства теоремы 4), что соответствие между матрицей g и тройкой (ζ, ε, u) является взаимно непрерывным. Следовательно, группа G как топологическое множество изоморфна прямому произведению $Z_- \times E \times U$.

Последнее замечание весьма существенно для уяснения топологической структуры группы G. Действительно, множество T изоморфно евклидову пространству. Следовательно, вся сложность топологической структуры «сосредоточена» в группе $\mathrm{U}(n)$.

Упражнения

1. Показать, что $\mathrm{GL}(n, \Phi) = \Phi_1 \cdot \mathrm{SL}(n, \Phi)$, где группа Φ_1 изоморфна мультипликативной группе поля Φ. (Указание: элементы Φ_1 диагональны с единственным собственным значением, отличным от единицы.)

2. Показать, что $\mathrm{U}(n) = \Phi_0 \cdot \mathrm{SU}(n)$, где группа Φ_0 изоморфна окружности и группа $\mathrm{SU}(n)$ определяется как пересечение $\mathrm{U}(n)$ с $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$.

3. Показать, что $GL(n) = UEU$. (Указание: положить $g = \rho u$ (полярное разложение) и привести матрицу ρ к диагональному виду.)

§ 10. Линейные группы, связанные с формами второго порядка

В приложениях часто встречаются линейные группы, которые выделяются из $\mathrm{GL}(n)$ условием сохранения некоторой формы второго порядка, подобно тому как группа вращений сохраняет скалярный квадрат. Мы займемся в этом параграфе классификацией и описанием простейших свойств таких линейных групп.

Пусть E — исходное n-мерное пространство. Для упрощения записей условимся рассматривать вектор $\xi \in E$ как координатный вектор-столбец и записывать всякую *билинейную форму* над E в виде

$$f(x, y) = x'fy, \quad x, y \in E,$$

где f — постоянная матрица, определяющая эту форму, и штрих означает транспонирование. Заменяя транспонирование эрмитовым сопряжением, мы можем рассматривать также *эрмитовы* или *полуторалинейные формы* вида x^*fy (которые линейны по y и антилинейны по x).

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что форма $f(x, y)$ невырождена, т. е. $\det f \neq 0$. (В противном случае форма f «содержит только часть переменных», определяющих x и y.) Равенство

$$f(gx, gy) = f(x, y)$$

означает, что форма f остается инвариантной при преобразовании g. Множество G_f всех линейных преобразований, оставляющих форму f инвариантной, как увидим,