

Упражнения

1. Показать, что $GL(n, \Phi) = \Phi_1 \cdot SL(n, \Phi)$, где группа Φ_1 изоморфна мультиплективной группе поля Φ . (Указание: элементы Φ_1 диагональны с единственным собственным значением, отличным от единицы.)

2. Показать, что $U(n) = \Phi_0 \cdot SU(n)$, где группа Φ_0 изоморфна окружности и группа $SU(n)$ определяется как пересечение $U(n)$ с $SL(n, C)$.

3. Показать, что $GL(n) = UEU$. (Указание: положить $g = \rho u$ (полярное разложение) и привести матрицу ρ к диагональному виду.)

§ 10. Линейные группы, связанные с формами второго порядка

В приложениях часто встречаются линейные группы, которые выделяются из $GL(n)$ условием сохранения некоторой формы второго порядка, подобно тому как группа вращений сохраняет скалярный квадрат. Мы займемся в этом параграфе классификацией и описанием простейших свойств таких линейных групп.

Пусть E — исходное n -мерное пространство. Для упрощения записей условимся рассматривать вектор $\xi \in E$ как координатный вектор-столбец и записывать всякую *билинейную форму* над E в виде

$$f(x, y) = x^T f y, \quad x, y \in E,$$

где f — постоянная матрица, определяющая эту форму, и штрих означает транспонирование. Заменяя транспонирование эрмитовым сопряжением, мы можем рассматривать также эрмитовы или *полуторалинейные формы* вида $x^* f y$ (которые линейны по y и антилинейны по x).

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что форма $f(x, y)$ невырождена, т. е. $\det f \neq 0$. (В противном случае форма f «содержит только часть переменных», определяющих x и y .) Равенство

$$f(gx, gy) = f(x, y)$$

означает, что форма f остается инвариантной при преобразовании g . Множество G_f всех линейных преобразований, оставляющих форму f инвариантной, как увидим,

образует группу. Действительно, имеем

$$x'g'fgy = x'fy.$$

Поскольку это равенство имеет место для всех значений $x, y \in E$, то мы заключаем, что матрицы $g'fg$ и f равны. Равенство

$$g'fg = f \quad (*)$$

необходимо и достаточно для инвариантности формы f . В частности, это равенство является определяющим для G_f . Вычисляя детерминанты обеих частей этого равенства, находим

$$(\det g)^2 \det f = \det f.$$

Поскольку мы условились, что $\det f \neq 0$, отсюда находим $\det g = \pm 1$. В частности, матрицы $g \in G_f$ всегда невырождены. Отсюда ясно, что G_f образует группу.

Отметим вначале простое правило для вычисления алгебры Ли группы G_f . Записывая g в виде $\exp tx$, мы подставляем эту экспоненту в (*). Дифференцируя по t при $t = 0$, находим

$$x'f + fx = 0.$$

С другой стороны, предположим, что матрица x удовлетворяет этому условию. Дифференцируя функцию $\varphi(t) = \exp tx \cdot f \cdot \exp tx$, с заменой x' на $-fxf^{-1}$ находим, что $\varphi'(t) = 0$. Следовательно, равенство

$$x' = -fxf^{-1} \quad (**)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы матрица x содержалась в алгебре Ли группы G_f . Иными словами, условие (**) является определяющим для искомой алгебры Ли.

Замечание. В частности, мы получим ортогональную группу $O(n)$, если положим $f = e$. Условие (**) принимает вид $x' = -x$, и мы заключаем, что всякая матрица x , касательная к группе вращений, является кососимметрической. Этот результат, в частности, хорошо известен в аналитической механике.

Перейдем к вопросу о классификации групп G_f . Ограничимся тем практически важным случаем, когда форма f симметрична или кососимметрична. За счет опреде-

ленного выбора базиса мы можем всегда привести форму f к одному из принятых в алгебре «канонических» видов. Особенно легко проводятся эти построения над полем комплексных чисел.

I. Классификация групп G_f над полем C . Если форма симметрична, то она, как известно, приводится в некотором базисе к виду

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Следовательно, в этом случае группа G_f изоморфна ортогональной группе, обозначаемой $O(n, C)$ («комплексно ортогональная группа»). Если форма f кососимметрична, то она, как известно, может быть невырожденной только в случае четной размерности $n = 2v$ и приводится к виду

$$[x, y] = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_vy_{v+1} - x_{v+1}y_v - \dots - x_ny_1.$$

Полученная группа обозначается $Sp(n, C)$ и называется (комплексной) *симплектической группой*. Эта группа встречается в геометрии при изучении комплексов прямых и в аналитической механике при изучении касательных преобразований. Заметим, что в случае $O(n, C)$ форма f может быть также приведена к виду

$$\{x, y\} = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1,$$

по записи сходному с $[x, y]$. Последний способ записи действительно часто оказывается удобным при изучении группы $O(n, C)$.

II. Классификация групп G_f над полем R . Над вещественным полем вместо формы (x, y) мы получаем целую серию канонических форм:

$$(x, y)_{pq} = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q},$$

$p + q = n$, которые отличаются друг от друга числом коэффициентов, равных ± 1 . Группа G_f , сохраняющая форму $(x, y)_{pq}$, обозначается $O(p, q)$ и называется *псевдоортогональной группой*. Форма

$$(x, y) = (x, y)_{n, 0}$$

определяет *ортогональную группу* $O(n) = O(n, R)$ над полем вещественных чисел. В кососимметрическом

случае мы по-прежнему получаем единственную группу $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, выделяемую из $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ условием вещественности.

III. Классификация G_f для полуторалинейной формы f . В полуторалинейном случае различие между симметричными и кососимметричными формами несущественно, поскольку умножение всех координат на $i = \sqrt{-1}$ сводит эти случаи друг к другу. Каноническая запись формы $f(x, y)$ имеет вид

$$\langle x, y \rangle_{pq} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_p \bar{y}_p - x_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - x_{p+q} \bar{y}_{p+q},$$

$p + q = n$. Линейная группа, сохраняющая эту форму, обозначается $\mathrm{U}(p, q)$ и называется *псевдоунитарной группой*. Если $q = 0$, то мы имеем форму

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Линейная группа $\mathrm{U}(n)$, сохраняющая эту форму, нам уже известна. Группа $\mathrm{U}(n)$ состоит из всех унитарных матриц порядка n и называется *полной унитарной группой*.

IV. Пересечения с группой $\mathrm{SL}(n)$. Пусть G_f^+ — пересечение группы G_f с унимодулярной группой $\mathrm{SL}(n)$. Подгруппа G_f^+ выделяется из G_f условием $\det g = 1$. Символ этой группы принято образовывать из символа G_f приписыванием слева буквы S (special). Так возникают группы $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $\mathrm{SU}(p, q)$. Группа $\mathrm{SO}(n)$ называется иногда *собственно ортогональной группой*.

V. Пересечения с группой $\mathrm{U}(n)$. Представляют интерес линейные группы, получаемые из комплексной группы G_f пересечением с $\mathrm{U}(n)$. При этом полученная группа сохраняет уже две формы второго порядка, одна из которых билинейна, а вторая полуторалинейна.

Начнем с рассмотрения $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, \mathbf{C})$. В дальнейшем мы увидим, что если исходную билинейную форму записывать в виде $\{x, y\}$, то пересечение $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$ с $\mathrm{U}(n)$ дает новую группу, отличную от $\{e\}$ и от обеих исходных групп. Эта группа обозначается $\mathrm{OU}(n)$ и называется *ортогонально-унитарной группой*.

Аналогично, пересечение $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ с унитарной группой $\mathrm{U}(n)$ приводит к рассмотрению новой линейной группы. Для этой группы мы введем обозначение $\mathrm{SpU}(n)$ и назовем ее *симплектически-унитарной группой*.

Символику, введенную для групп, дополним соответствующей строчной символикой для алгебр Ли: $\mathrm{so}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{sp}(n, \mathbf{R})$ и т. д.

Упражнения

1. Согласно результатам этого параграфа матрицы

$$a_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

образуют базис в алгебре $\mathrm{so}(3, \mathbf{R})$. Проверить, что закон коммутации в этом базисе имеет вид

$$[a_i, a_j] = a_k,$$

где i, j, k — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3. Полученная алгебра называется *алгеброй векторных произведений*.

2. Найти закон коммутации для матриц

$$a_1 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

образующих базис в алгебре $\mathrm{su}(2)$.

3. Пусть p_i, q_i — линейно независимые символы в некоторой ассоциативной алгебре, подчиненные закону коммутации:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Проверить, что линейные комбинации этих символов удовлетворяют таким же соотношениям коммутации только в том случае, когда матрица преобразования симплектически.

§ 11. Кватернионы

Все линейные группы, рассмотренные в предыдущих трех параграфах, принято называть *классическими*. Мы покажем, что простейшие из этих групп тесно связаны с геометрией кватернионов.

Пусть E — четырехмерное пространство над полем комплексных чисел с базисом e_0, e_1, e_2, e_3 . Введем в