положим

$$a^+b = a_1^+b_1 + a_2^+b_2 + \ldots + a_\nu^+b_\nu.$$

Пусть G — группа всех линейных преобразований $a_i \to g_{ij}a_j$ (сумма по j) над телом кватернионов, сохраняющих форму a^+b. Легко проверить, что группа G изоморфна $\mathrm{Sp\,U}(n)$ при $n = 2\nu$.

В частности, группа $\mathrm{Sp\,U}(2)$, сохраняющая норму в теле кватернионов, изоморфна $\mathrm{SU}(2)$.

Упражнение

Доказать локальный изоморфизм между $\mathrm{SO}(3, \boldsymbol{R})$, $\mathrm{SU}(2)$ путем сравнения соответствующих алгебр Ли (см. упражнения 1 и 2 в конце предыдущего параграфа).

§ 12. Вопросы односвязности

В этом параграфе мы исследуем вопрос об односвязности некоторых классических групп. Вначале напомним некоторые простейшие сведения из общей топологии.

Пусть вначале M — произвольное множество, представимое в виде суммы непересекающихся подмножеств M_β. В этом случае говорят, что семейство M_β образует *разбиение* множества M, и множество B всех индексов β называется *фактор-пространством* множества M относительно этого разбиения. Переход от пространства M к фактор-пространству B равносилен «склейке» всех точек, лежащих в одном и том же подмножестве M_β. Если все такие подмножества эквивалентны одному из них, скажем A, то для обозначения фактор-пространства используется символ

$$B = M/A.$$

Далее, пусть M — топологическое пространство. Множество P индексов β назовем открытым (замкнутым) в B, если объединение всех подмножеств M_β, $\beta \in P$, открыто (замкнуто) в M. Всякое открытое множество, содержащее точку β, называется окрестностью этой точки. Тем самым в B определяется топология, называемая *фактортопологией*.

Топологические множества P и Q называются *гомеоморфными*, если между ними существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение. Если

$$B = M/A$$

и если все слои M_β гомеоморфны слою A, то мы условимся говорить, что пространство M является *расслоением* со слоем A и базой B.

Пример 1. *Лист Мёбиуса* является расслоением с базой окружность и со слоем отрезок.

Пример 2. *Двумерный тор* является расслоением с базой окружность и со слоем окружность.

Пример 3. *Прямое произведение* $A \times B$ произвольных топологических пространств можно рассматривать как расслоение со слоем A и базой B.

Далее, пусть G — произвольная группа и H — ее подгруппа. Каждому $g \in G$ поставим в соответствие слой gH, называемый *правым классом смежности по* H. Нетрудно видеть, что таким путем возникает разбиение с фактор-пространством $F = G/H$. Если G — топологическая группа и H — ее замкнутая подгруппа, то мы имеем расслоение со слоем H.

Понятие расслоения обычно используется для индуктивного изучения топологических множеств и топологических групп. В частности, мы будем использовать следующие общие утверждения (см., например, [46]):

1° *Пусть G — связная группа Ли и H — ее замкнутая связная подгруппа. Если H и G/H односвязны, то группа G также односвязна.*

2° *Пусть $M = A \times B$, где A и B — топологические пространства. Пространство M односвязно тогда и только тогда, когда односвязны A и B.*

В дальнейшем мы условимся, что термин «односвязность» будет применяться только к связному топологическому множеству; иначе говоря, под этим термином мы будем иметь в виду одновременно связность и односвязность. Такое соглашение удобно, поскольку мы, как правило, будем рассматривать только связные топологические группы. Изучение классических линейных групп нам будет удобно начать с изучения группы $\mathrm{SU}(n)$.

Теорема 7. *Группа* $\mathrm{SU}(n)$ *односвязна.*

Доказательство. Связность $SU(n)$ легко вытекает из рассмотрения соответствующего множества реперов. Для доказательства односвязности рассмотрим единичную сферу S в исходном векторном пространстве и фиксируем на ней произвольную точку, скажем $\varepsilon = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Пусть H — стационарная подгруппа точки ε, т. е. множество всех преобразований, оставляющих ε на месте. Положим

$$F = G/H,$$

где $G = SU(n)$. Нетрудно видеть, что группа H изоморфна $SU(n-1)$. В то же время фактор-пространство F гомеоморфно сфере S. Действительно, пусть G_σ — множество всех преобразований в G, переводящих ε в σ. Если $g_1, g_2 \in G_\sigma$, то $g_1^{-1}g_2 \in H$, откуда ясно, что

$$G_\sigma = gH,$$

где g — произвольно фиксированный элемент из G_σ. Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то $G_{\sigma_1} \neq G_{\sigma_2}$. Следовательно, мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками $\sigma \in S$ и правыми классами смежности, входящими в F. Нетрудно видеть также, что это соответствие взаимно непрерывно.

Теперь мы можем применить критерий односвязности 1°. Заметим, что единичная сфера $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n = 1$ изоморфна вещественной сфере S^{2n-1} размерности $2n-1$. Вещественная сфера S^k односвязна при $k \geqslant 2$ (это утверждение легко проверяется по индукции). Согласно 1° из односвязности $SU(n-1)$ следует односвязность $SU(n)$ при $n \geqslant 2$, и мы получаем возможность индукции по n. Остается заметить, что $SU(1)$ состоит из единственной точки и потому односвязна. Теорема доказана.

Теорема 8. *Группа* $SL(n, \boldsymbol{C})$ *односвязна.*

Доказательство. Согласно разложению Грама (§ 9) группа $SL(n, \boldsymbol{C})$ гомеоморфна прямому произведению евклидова пространства на $SU(n)$. Согласно критерию 2° группа $SL(n, \boldsymbol{C})$ односвязна вместе с $SU(n)$. Теорема доказана

Теорема 9. *Группы* $U(n)$, $GL(n, \boldsymbol{C})$ *связны, но неодносвязны.*

Доказательство. Достаточно заметить (см. упражнения 1 и 2 в конце § 9), что $U(n)$, $GL(n)$ гомеоморфны соответственно прямым произведениям $U(1)\times SU(n)$, $GL(1)\times SL(n)$. Согласно критерию 2° группы $U(n)$ и $GL(n)$ неодносвязны вместе с $U(1)$, $GL(1)$. Теорема доказана.

Значительно более сложно исследуется случай ортогональной группы $SO(n)$. Группа $SO(2)$ неодносвязна. Оказывается также, что $SO(n)$ *неодносвязна при любом* n, $n\geqslant 2$. Доказательство достигается путем непосредственного построения универсальной накрывающей.

Изложим схему построения в общих чертах*). Пусть E — n-мерное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пространство E включим в ассоциативную алгебру K, в которой парные произведения e_ie_j связаны единственным условием:

$$e_ie_j+e_je_i=2\delta_{ij}, \qquad (*)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Положим $e_0=1$, $e_{i_1i_2\ldots i_n}=e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}$. Пусть K — линейная оболочка таких одночленов. Согласно (*) достаточно рассматривать лишь те одночлены, для которых $i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_m$; кроме того, если два индекса совпадают, то возникающий множитель e_i^2 заменяется единицей. Следовательно, одночлены

$$e_{i_1i_2\ldots i_m}, \qquad i_1<i_2<\ldots<i_m, \quad 0\leqslant m\leqslant n,$$

образуют базис в алгебре K. В частности, K конечномерна. Полученная алгебра K носит название *алгебры Клиффорда*.

Введем скалярный квадрат в пространстве E как сумму квадратов координат относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Если $E\subset K$, то мы имеем

$$x^2=(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Следовательно, квадрат элемента $x\in E$ в алгебре K является скаляром и совпадает со скалярным квадратом в пространстве E.

Рассмотрим в алгебре K преобразование вида $\tau(y)x=yxy^{-1}$, где y — произвольный обратимый элемент из K. Пусть $\mathfrak{G}$ — максимальное множество таких преобразований, сохраняющих E и непрерывно связанных с единицей. Если $z=\tau(y)x$, $y\in\mathfrak{G}$, то мы имеем

$$z^2=yx^2y^{-1}=x^2,$$

ибо x^2 является скаляром. Следовательно, $\tau(y)\subset O(n)$. В силу связности группы $\mathfrak{G}$ имеем $\tau(y)\subset SO(n)$. Дальнейшие действия мы

*) Более подробное изложение см. в § 115.

излагаем сокращенно. Проверяется, что $\mathfrak{G}$ и $SO(n)$ имеют одинаковую размерность. Проверяется, что ядро гомоморфизма дискретно. Следовательно,

$$\tau(\mathfrak{G}) = SO(n).$$

Более точно, ядро гомоморфизма τ состоит из двух элементов: $\pm e_0$. Это означает, что группа $\mathfrak{G}$ двукратно накрывает $SO(n)$ *).

В дальнейшем мы увидим, что группа $\mathfrak{G}$ односвязна. Эта группа называется *спинорной группой* и обозначается $\mathrm{Spin}(n)$.

Для каждого случая неодносвязной группы, рассматриваемого в этом параграфе, нетрудно вычислить также соответствующую группу Пуанкаре. В частности, группа Пуанкаре для $SO(n)$ при $n > 2$ оказывается изоморфной конечной группе, состоящей из чисел ± 1 (по умножению).

Упражнения

1. Проверить, что алгебра Клиффорда имеет размерность 2^n.
2. Используя конструкцию предыдущего параграфа, показать, что $SU(2)$ является универсальной накрывающей для $SO(3, \boldsymbol{R})$.
3. Доказать, что группы $SpU(n)$, $Sp(n, \boldsymbol{C})$ односвязны при произвольном n.

§ 13. Вопросы комплексификации

Группа Ли называется *комплексной*, если она допускает комплексную параметризацию, относительно которой закон умножения задается голоморфными (комплексно-аналитическими) функциями. Как следует из этого определения, если $\mathfrak{G}$ — комплексная группа Ли, то ее алгебра Ли допускает комплексную структуру, т. е. является алгеброй Ли над полем комплексных чисел. Комплексная структура сообщает алгебре Ли специфические свойства, обусловленные, как правило, тем обстоятельством, что над комплексным полем всякое линейное преобразование обладает собственным вектором.

Если $\mathfrak{X}$ — комплексная алгебра Ли, то иногда в ней удается выделить вещественную подалгебру X, имеющую те же структурные константы, что и $\mathfrak{X}$. Очевидно, это возможно тогда и только тогда, когда структурные константы алгебры $\mathfrak{X}$ в некотором базисе вещественны.

---

*) Очевидно, построение группы $\mathfrak{G}$ является обобщением конструкции предыдущего параграфа.