Пример 4. Группы $O(n, \boldsymbol{C})$, $Sp(n, \boldsymbol{C})$ являются соответственно комплексными оболочками $O(n, \boldsymbol{R})$, $Sp(n, \boldsymbol{R})$. Они являются также комплексными оболочками $OU(n)$, $Sp\,U(n)$.

Пример 5. Группа $SL(n, \boldsymbol{C})$ является комплексной оболочкой $SL(n, \boldsymbol{R})$ и также комплексной оболочкой $SU(p, q)$, $p + q = n$. В частности, $SL(n, \boldsymbol{C})$ является комплексной оболочкой группы $SU(n)$.

Пример 6. Группа $SO(n, \boldsymbol{C})$ является комплексной оболочкой $SO(n, \boldsymbol{R})$.

Замечание. Подчеркнем, что группы $U(n)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$ не являются комплексными группами Ли, хотя их определение и дается над полем комплексных чисел. Например, алгебра $\mathfrak{u}(n)$ состоит из всех матриц a, для которых $a^* = -a$. Это свойство нарушается при умножении матрицы a на произвольный комплексный множитель. Следовательно, $\mathfrak{u}(n)$ не является комплексной алгеброй Ли. В качестве другого объяснения можно заметить, что закон умножения в $U(n)$ не задается голоморфными функциями, ибо эти функции зависят не только от комплексных параметров в $U(n)$, но и от их комплексно сопряженных.

В дальнейшем мы увидим, что соотношения между вещественными и комплексными группами Ли играют существенную роль в общей теории.

§ 14. Преобразования в классе тензоров

С каждой линейной группой G тесно связана серия геометрических преобразований, порождаемых этой группой в классе тензоров. Для полноты изложения мы напомним в этом параграфе основные свойства тензоров и условимся в некоторой системе обозначений.

Пусть E и E' — два линейных пространства одинаковой конечной размерности n; векторы из E мы будем обозначать латинскими буквами $x, y, \ldots$; векторы из E' — греческими буквами $\xi, \eta, \ldots$ Фиксируя в каждом из пространств произвольный линейный базис, мы отождествляем векторы $x, y, \xi, \eta, \ldots$ с соответствующими столбцами координат. Билинейная форма

$$f(\xi, x) = \xi' x,$$

где штрих означает транспонирование, является одним из важнейших объектов в линейной алгебре и геометрии. Если рассматривать E как основное векторное пространство, то функции $\xi' x$ являются линейными формами на E и уравнения $\xi' x = 0$ определяют всевозможные гиперплоскости, проходящие через начало координат. Пространства E, E' называют *сопряженными*, *дуальными* или *двойственными*.

Пусть векторы x, ξ подвергаются линейным преобразованиям g, h (каждый в своем пространстве). Преобразования g, h называются *дуальными* или *контрагредиентными*, если их совместное применение не изменяет формы $f(\xi, x)$:

$$f(h\xi,\ gx) = f(\xi,\ x).$$

Поскольку $\xi' \to \xi' h'$, то указанное правило сохранения переписывается также следующим образом: $\xi' h' g x = \xi' x$, откуда ввиду произвольности ξ и x заключаем, что матрица $h'g$ совпадает с единичной: $h'g = e$. В результате имеем

$$h = g'^{-1}.$$

Эта формула дает явное выражение преобразования, контрагредиентного к g. Заметим, что это преобразование является автоморфизмом группы G при условии, что G сохраняется при транспонировании.

Пусть $x = x^i e_i$ — координатная запись вектора $x \in E$ в базисе e_i. Преобразование g в пространстве E можно рассматривать как переход к новому базису $\tilde{e}_i$ с координатами $\tilde{x}^i$. Равенство $x^i e_i = \tilde{x}^i \tilde{e}_i$ показывает, что символы e_i преобразуются по тому же закону, что и координаты дуального вектора $\xi \in E'$. По этой причине преобразование $h = g'^{-1}$ называется *ковариантным* (преобразование по закону базиса).

В дальнейшем мы условимся использовать обозначение $\hat{g}$ вместо g'^{-1}. Векторы $\xi \in E'$ будут называться *ковариантными*, векторы $x \in E$ — *контравариантными*.

Напомним определение тензорного произведения двух линейных пространств X и Y. Для каждой пары элементов $x \in X$, $y \in Y$ вводится формальное произведение $x \otimes y$, которое предполагается дистрибутивным по обоим

сомножителям. Очевидно, имеем

$$x \otimes y = x^i y^k e_{ik},$$

где x^i — координаты x относительно базиса e_i, y^k — координаты y относительно базиса ε_k и $e_{ik} = e_i \otimes \varepsilon_k$. Пространство $Z = X \times Y$ определяется как линейная оболочка всевозможных векторов $x \otimes y$, $x \in X$, $y \in Y$. Из этого определения следует, что векторы e_{ik} образуют базис в Z.

Согласно этому определению произвольный вектор из Z имеет вид $t^{ik} e_{ik}$, где t^{ik} — произвольные числа. Следовательно, Z имеет размерность nm, где $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Векторы вида $x \otimes y$ представляют собой лишь частный случай элементов из Z. Действительно, всякий минор матрицы $x^i y^k$ равен нулю, за исключением миноров порядка 1.

Пусть векторы x, y подвергаются линейным преобразованиям a, b (каждый в своем пространстве). Тогда произведение $x \otimes y$ также подвергается линейному преобразованию, которое обозначается символом

$$c = a \otimes b$$

и называется *тензорным произведением операторов* a и b. Если $a = \| a_j^i \|$, $b = \| b_l^k \|$, то легко проверить, что матрица c имеет элементы $c_{jl}^{ik} = a_j^i b_l^k$ относительно базиса e_{ik}. Основное свойство тензорных произведений выражается следующей формулой: если $c_1 = a_1 \otimes b_1$, $c_2 = a_2 \otimes b_2$, то

$$c_1 c_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Иначе говоря, композиция двух преобразований c_1, c_2 равносильна композиции компонент a_1, a_2 в пространстве X и одновременной композиции b_1, b_2 в пространстве Y.

В частности, пусть E^p — тензорное произведение p экземпляров пространства E. Каждому линейному преобразованию g в пространстве E отвечает преобразование

$$a(g) = g \otimes g \otimes \ldots \otimes g \qquad (p \text{ сомножителей}),$$

где кратное произведение определяется индуктивно. Как следует из основного свойства тензорных произведений, матрица $a(g)$ удовлетворяет условию мультипликативности: $a(g_1g_2) = a(g_1)a(g_2)$; кроме того, $a(e) = e_p$, где e_p — единичный оператор в E^p. Следовательно, $a(g)$ является гомоморфизмом группы G в группу линейных преобразований пространства E^p. Точно так же в пространстве E'^q мы имеем преобразование

$$b(g) = \hat{g} \otimes \hat{g} \otimes \ldots \otimes \hat{g} \qquad (q \text{ сомножителей}),$$

которое является гомоморфным образом преобразования g. Наконец, при произвольных p и q мы можем рассматривать гомоморфизм

$$c(g) = a(g) \otimes b(g),$$

причем преобразование $c(g)$ действует в $E^{pq} = E^p \times E'^q$.

Векторы пространства E^p называются *контравариантными тензорами ранга p*, векторы пространства E'^q — *ковариантными тензорами ранга q*. Наконец, векторы пространства E^{pq} называются *смешанными тензорами*, p раз контравариантными и q раз ковариантными.

Наряду с символикой «строка — столбец» мы будем также пользоваться обычной символикой индексов. Координаты векторов из E^{pq} будут записываться в виде $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$. Закон преобразования при этом записывается следующим образом:

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \to g^{i_1}_{k_1} g^{i_2}_{k_2} \ldots g^{i_p}_{k_p} \tilde{g}^{l_1}_{j_1} \tilde{g}^{l_2}_{j_2} \ldots \tilde{g}^{l_q}_{j_q} t^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{l_1 l_2 \ldots l_q},$$

где $\tilde{g} = g^{-1}$. Здесь мы считаем, что нижний индекс у матрицы является индексом суммирования; поэтому матрица $\tilde{g}$ в действительности встречается в транспонированном виде.

Таким образом, с каждым преобразованием $g \in G$ связана целая серия тензорных преобразований. Хорошо известно, какую роль играют эти преобразования в геометрии и физике.

Вместо тензоров иногда практически удобно бывает рассматривать полилинейные формы. Заметим вначале,

что если $t \in E^p$, $\tau \in E'^p$, то свертка

$$\tau t = \tau_{i_1 i_2 \ldots i_p} t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

является инвариантом группы G. Если, в частности, тензор t является произведением векторов $x, y, \ldots, w \in E$, то мы получаем общий вид *ковариантной полилинейной формы*:

$$\varphi(x, y, \ldots, w) = \tau_{i_1 i_2 \ldots i_p} x^{i_1} y^{i_2} \ldots w^{i_p}.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты этой формы могут быть выражены в свою очередь как значения формы на соответствующем наборе базисных векторов $e_i \in E$:

$$\tau_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}).$$

Допустим, что векторы $x, y, \ldots, w$ подвергаются преобразованию g и тензор τ подвергается соответствующему преобразованию $b(g)$. Пусть $B(g)\varphi$ — новая форма с коэффициентами $b(g)\tau$. Свойство инвариантности свертки может быть выражено формулой

$$B(g)\varphi(gx, gy, \ldots, gw) = \varphi(x, y, \ldots, w).$$

Отсюда в свою очередь следует явный вид преобразованной формы:

$$B(g)\varphi(x, y, \ldots, w) = \varphi(g^{-1}x, g^{-1}y, \ldots, g^{-1}w).$$

Очевидно, рассмотрение полилинейной формы с законом преобразования $B(g)$ равносильно рассмотрению тензора τ. Точно так же вместо контравариантного тензора t мы можем рассматривать *контравариантную форму* $f(\xi, \eta, \ldots, \omega)$ с законом преобразования

$$A(g) f(\xi, \eta, \ldots, \omega) = f(\xi g, \eta g, \ldots, \omega g).$$

Форма $\varphi(x, y, \ldots, w)$ называется *симметричной* (*кососимметричной*) по паре аргументов, скажем x и y, если она не меняется (меняет знак) при перестановке этих аргументов. Соответствующий тензор также является *симметрическим* (*кососимметрическим*) при перестановке соответствующих тензорных индексов. Приме-

ром формы, кососимметричной по всем переменным, является детерминант:

$$\delta(x, y, \ldots, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & w_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & w_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \ldots & w_n \end{vmatrix}.$$

Более того, как известно, эта форма определяется условием кососимметричности однозначно, с точностью до числового множителя. Мы уже однажды воспользовались этим свойством в § 7.

Подобно тому как произвольный тензор ранга m может быть заменен полилинейной формой, произвольный *симметрический* ковариантный тензор $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ может быть заменен полиномом

$$p(x) = \tau_{i_1 i_2 \ldots i_m} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_m}$$

от единственного вектора $x \in E$. Действительно, числовые значения полинома вполне определяют симметрический тензор коэффициентов. Формула

$$T(g)\, p(x) = p(g^{-1}x)$$

определяет соответствующее преобразование в классе полиномов. Точно так же можно рассматривать полиномы $p(\xi)$ с законом преобразования $T(g)p(\xi) = p(\xi g)$.

* * *

Данное нами определение линейной группы исключает, согласно традиции, «бесконечномерные линейные группы», т. е. группы линейных преобразований в бесконечномерных векторных пространствах. Тем самым получаем специальный класс групп Ли, поддающийся сравнительно простому описанию. Более подробно с некоторыми свойствами классических групп и тензоров можно ознакомиться в монографии Вейля [9].

Линейные группы, сохраняющие квадратичные формы, являются частным случаем так называемых алгебраических групп. Теория этих групп развита главным образом в работах Шевалле ([46], т. II); для этих групп удается независимо получить ряд глубоких результатов, дублирующих «аналитическую» теорию. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. XVI.