допускает такую параметризацию, при которой часть переменных образует параметры внутри слоя и другая часть переменных (непрерывно или гладко) параметризует семейство слоев. В этом случае задача, очевидно, сводится к изучению однородного пространства, роль которого играет каждый отдельный слой.

§ 16. Терминология теории представлений

1. Как уже было сказано, *представлением* группы G в линейном пространстве V называется гомоморфное отображение этой группы в группу обратимых линейных преобразований пространства V. Следовательно, каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие линейный оператор T_g, действующий в пространстве V, причем

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2},$$
$$T_e = I,$$

где I — единичный оператор в V. Если группа G топологическая, то при этом требуют также, чтобы операторная функция T_g непрерывно зависела от g. Если V бесконечномерно, то в этом определении необходимо уточнить, какая именно топология в пространстве операторов имеется в виду. О важнейших примерах представлений было сказано в предыдущем параграфе.

Заметим, что определение операторной функции T_g естественно рассматривать как обобщение функционального уравнения для экспоненты. Некоторые группы обладают числовыми экспонентами, например, $T_g = \det g$ для полной линейной группы $\mathrm{GL}(n)$. Однако если в этой группе рассмотреть подгруппу $\mathrm{SL}(n)$, для элементов которой $\det g = 1$, то, как увидим, такая подгруппа уже не имеет числовых экспонент, за исключением тривиального случая $T_g \equiv 1$. Однако у этой группы имеется серия матричных экспонент (тензоры), с рассмотрения которых исторически и началось развитие теории представлений. Кроме того, у этой группы имеется серия бесконечномерных представлений, не сводящихся к тензорам.

Размерность пространства, в котором действует представление, называется также *размерностью* этого представления. Поскольку в этой книге мы преимущественно будем рассматривать представления в пространствах конечной размерности, то для краткости нам будет удобно понимать под словом «представление» только «конечномерное представление». Это соглашение связано с традицией, но не всегда приемлемо в современной литературе, где часто рассматриваются бесконечномерные представления. Все случаи бесконечномерных представлений нам придется оговаривать особо.

2. Два представления T_g, S_g считаются *эквивалентными*, если существует взаимно однозначное линейное соответствие, переводящее T_g в S_g, т. е. если

$$S_g = AT_gA^{-1},$$

где A — линейный обратимый оператор, отображающий пространство представления T_g на пространство представления S_g. Очевидно, эквивалентные представления имеют одинаковую размерность. Если оба они определены в одном и том же пространстве, то матрицы T_g, S_g переходят друг в друга при замене базиса.

3. Вектор $e_0 \in V$ называется *инвариантным*, если $T_ge_0 = e_0$ для всех $g \in G$. Подпространство V_0 называется *инвариантным*, если векторы из V_0 переходят в векторы из V_0, т. е. если $T_gV_0 \subset V_0$. Заметим, что последнее условие можно также записывать в виде $T_gV_0 = V_0$ (ввиду обратимости T_g). Подпространство V_0 называется *нетривиальным*, если оно отлично от (0) и от пространства V.

4. Если имеется инвариантное подпространство $V_1 \subset \subset V$, то существенно выяснить, допускает ли оно инвариантное дополнение, т. е. можно ли представить V в виде прямой суммы

$$V = V_1 + V_2,$$

где V_2 также инвариантно. В этом случае произвольная матрица T_g может быть записана в виде двух независимых блоков:

$$T_g = \begin{Vmatrix} T_g^{(1)} & 0 \\ 0 & T_g^{(2)} \end{Vmatrix},$$

если использовать базис, приуроченный к V_1, V_2. Операторы $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$ определяют соответственно представления в V_1, V_2, называемые *компонентами* представления T_g. Представление T_g называется в этом случае *прямой суммой* представлений $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$. В общем случае T_g может быть приведено только к квазитреугольному виду

$$T_g = \begin{Vmatrix} T_g^{(1)} & * \\ 0 & T_g^{(2)} \end{Vmatrix}$$

относительно базиса, приуроченного к V_1, V_2, где V_1 инвариантно и $V = V_1 + V_2$. При этом звездочка означает прямоугольный матричный блок, элементы которого являются функциями от g.

Представление называется *приводимым*, если хотя бы одно нетривиальное инвариантное подпространство существует. Представление называется *вполне приводимым*, если всякое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение. Представление называется *неприводимым*, если инвариантны только (0) и V.

Не представляет труда проверка следующих простых утверждений. *В пространстве всякого представления содержится хотя бы одно неприводимое подпространство.* Отсюда заключаем (путем последовательной редукции), что *всякое представление может быть записано в квазитреугольном виде с неприводимыми диагональными блоками.* Представление вполне приводимо тогда и только тогда, когда оно записывается в виде прямой суммы конечного числа неприводимых представлений.

Представление T_g называется *кратным* представлению τ_g, если оно может быть записано в виде прямой суммы конечного числа представлений, эквивалентных τ_g. Символически пишем $T = k\tau$, где k — кратность вхождения τ. Заметим, что это разложение существенно неоднозначно. В то же время, если $T = k_1\tau_1 + k_2\tau_2 + \ldots$ $\ldots + k_n\tau_n$, где плюс означает прямую сумму, и если τ_i — неприводимые взаимно неэквивалентные представления, то такое разложение на компоненты $k_i\tau_i$ уже является однозначным. Доказательство всех этих утверждений предоставляется читателю.

5. Два представления T_g, $\widehat{T}_g$, действующие в пространствах V, $\widehat{V}$, называются *контрагредиентными*, если существует невырожденная билинейная форма (x, ξ), $x \in V$, $\xi \in \widehat{V}$, инвариантная по отношению к совместному действию этих представлений:

$$(T_g x,\ \widehat{T}_g \xi) = (x,\ \xi).$$

Невырожденность означает, что для любого $x \neq 0$ найдется $\xi \in \widehat{V}$ такой, что $(x, \xi) \neq 0$, и то же верно, если поменять местами x и ξ. Пространства V и $\widehat{V}$ имеют в этом случае одинаковую размерность и их возможно отождествить. При подходящем выборе базиса форма (x, ξ) диагонализуется и условие контрагредиентности принимает вид

$$\widehat{T}_g = T_g'^{-1}.$$

Здесь штрих означает переход к транспонированной матрице по отношению к выбранному базису. Если интерпретировать $\widehat{V}$ как пространство гиперплоскостей пространства V (проходящих через начало координат), то принадлежность вектора x гиперплоскости ξ $((x, \xi) = 0)$ равносильна принадлежности вектора $T_g x$ гиперплоскости $\widehat{T}_g \xi$ $((T_g x,\ \widehat{T}_g \xi) = 0)$.

Примером контрагредиентных представлений являются преобразования в классе ковариантных и в классе контравариантных тензоров одного и того же ранга m.

6. Представление T_g называется *тензорным произведением представлений* A_g и B_g, если

$$T_g = A_g \otimes B_g$$

для всех $g \in G$ (определение символа $\otimes$ было дано в § 14). Заметим, что тензорное произведение двух линейных пространств X и Y изоморфно пространству прямоугольных матриц размерности nm, где $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Если x и y — координатные столбцы из X и Y, то вместо $x \otimes y$ мы можем формально писать $z = xy'$, где штрих означает транспонирование. Отсюда ясно, что

$$T_g z = A_g z B_g'.$$

Полученная формула при произвольной матрице z размеров $n \times m$ дает явный вид представления T_g, который часто оказывается удобным для вычислений.

7. В дополнение к введенным выше основным понятиям теории представлений мы введем еще некоторые термины, которые будут иногда использоваться в дальнейшем. Если представление T_g неприводимо в пространстве V, то также говорят, что V неприводимо относительно T_g. Если $AT_g = S_gA$, где A — линейный оператор из пространства представления T_g в пространство представления S_g, то A называется *переплетающим оператором* для пары T_g, S_g. В частности, если A обратим, то $S_g = AT_gA^{-1}$, и представления T_g, S_g эквивалентны. Представление T_g называется *унитарным*, если операторы T_g унитарны при каждом g.

Следующее простое утверждение будет играть принципиальную роль во многих дальнейших построениях.

Теорема 1. *Всякое унитарное представление вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть (x, y) — скалярное произведение, относительно которого T_g унитарно. Тогда $(T_gx, y) = (x, T_g^{-1}y)$ для всякой пары векторов $x, y \in V$. Покажем, что если V_1 — инвариантное подпространство, то его ортогональное дополнение V_2 также инвариантно. В самом деле, если $x \in V_2$, $y \in V_1$, то имеем

$$(T_gx, y) = (x, T_g^{-1}y) = 0,$$

ибо $T_g^{-1}y$ содержится в V_1 вместе с y. Мы видим, что для всякого $x \in V_2$ вектор T_gx также содержится в V_2. Следовательно, V_2 инвариантно. Следовательно, всякое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 (вместе с доказательством) сохраняет силу также для бесконечномерного представления T_g.

В заключение рассмотрим несколько простых примеров приводимых представлений.

Пример 1. Всякий тензор t^{ij} однозначно записывается в виде суммы симметричного и антисимметрич-

ного тензоров:

$$s^{ij}=\frac{1}{2}(t^{ij}+t^{ji}),\quad a^{ij}=\frac{1}{2}(t^{ij}-t^{ji}).$$

Подпространства этих тензоров инвариантны. Следовательно, $g\otimes g$ всегда разбивается в прямую сумму двух представлений.

В дальнейшем мы увидим, что для группы $\mathrm{GL}(n)$ и группы $\mathrm{SL}(n)$ такие два представления уже неприводимы (для произвольной линейной группы это не так).

Пример 2. Смешанный тензор второго ранга t^i_j преобразуется по представлению $g\otimes\hat{g}$, которое может быть записано с помощью явной формулы, указанной в этом параграфе:

$$T_g z=gzg^{-1}.$$

Здесь z — произвольная матрица $n\times n$. Пространство Z всех таких матриц запишем в виде суммы подпространства Z_0, состоящего из матриц с нулевым следом, и одномерного подпространства Z_1, натянутого на единичную матрицу e:

$$Z=Z_0+Z_1.$$

Нетрудно видеть, что Z_0, Z_1 инвариантны. Следовательно, $g\otimes\hat{g}$ также записывается всегда в виде суммы двух представлений.

Заметим, что пространство Z_1 неприводимо (ибо одномерно). Для группы $\mathrm{GL}(n)$ мы докажем в дальнейшем также неприводимость Z_0.

Пример 3. Любопытно сравнить следующие два представления аддитивной группы вещественных чисел матрицами второго порядка:

$$u(t)=\begin{Vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{Vmatrix},\quad z(t)=\begin{Vmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Первое из этих представлений неприводимо над полем $\boldsymbol{R}$, но распадается в прямую сумму двух представлений над полем $\boldsymbol{C}$:

$$u(t)\sim\begin{Vmatrix}e^{-it} & 0\\ 0 & e^{it}\end{Vmatrix},$$

где тильда означает эквивалентность. В то же время второе представление приводимо, но, как легко проверить, не вполне приводимо.

Для бесконечномерных представлений многие из приведенных определений нуждаются в дополнениях и уточнениях; в частности, для таких представлений существует много различных определений неприводимости и эквивалентности.

§ 17. Редукция основной проблемы

Поскольку правые (и левые) трансляции в группе действуют транзитивно, группа G как множество сама является однородным пространством. Нашей ближайшей целью является показать, что это пространство является в известном смысле *универсальным* в классе всех однородных пространств с группой движений G.

Идея доказательства основана на свойстве транзитивности однородного пространства X. Действительно, всякая фиксированная точка $\varepsilon \in X$ может быть переведена в любую другую точку $x \in X$ путем хотя бы одного преобразования $g \in G$. Следовательно, запас элементов в группе G в известном смысле больше запаса точек в пространстве X. Для более точного построения естественно поступить следующим образом.

Пусть H — совокупность всех преобразований, оставляющих точку ε на месте; тогда, очевидно, H является подгруппой; такая подгруппа называется *стационарной подгруппой* точки ε.

Рассмотрим теперь произвольный класс смежности Hg, где g — произвольный элемент из G. Нетрудно видеть, что все преобразования этого класса переводят точку ε в одну и ту же точку $x = \varepsilon g$. Более того, используя стандартные рассуждения, неоднократно применявшиеся выше, легко получаем, что множество Hg содержит все преобразования, обладающие указанным свойством. Следовательно, множество X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех левых классов смежности, которое, как и в § 12, обозначим G/H.