$a \to ag$. Вместо функций $f(x)$ можно рассматривать функции $f(a)$, зависящие только от параметров выделенной строки.

2. Пусть $G = \mathrm{SO}(n)$ и x — n-мерная строка в евклидовом пространстве E. Желая получить однородное пространство, мы ограничиваемся в E рассмотрением единичной сферы S. Если x пробегает S, то, рассуждая, как в § 12, получаем, что S эквивалентно G/H, где H изоморфно $\mathrm{SO}(n-1)$.

3. Проиллюстрируем несколько иначе результат предыдущего примера для случая $n = 3$. Используя углы Эйлера, запишем произвольную матрицу из $\mathrm{SO}(3)$ в виде $g = h_1 u h_2$, где h_1, h_2 — повороты вокруг оси Oz и u — поворот вокруг оси Ox. Пусть ε — северный полюс; тогда подгруппа H состоит из поворотов вокруг оси Oz. Записывая вращение в виде gx, мы обнаруживаем, что $g\varepsilon = h_1 u \varepsilon$. Параметры h_1 и u можно рассматривать как параметры на сфере (широта и долгота).

В заключение заметим, что левое регулярное представление необходимо записывать в виде $L_{g_0} f(g) = f(g_0^{-1} g)$; только при таком определении отображение $g \to L_g$ является гомоморфизмом. Подстановка $g \to g^{-1}$ в классе функций $f(g)$ осуществляет, как легко проверить, эквивалентность L_g, R_g.

Упражнения

1. Пусть G — конечная группа и H — ее подгруппа. Показать, что порядок H (число элементов в H) является делителем порядка G.

2. Пусть G — конечная группа преобразований, G_x — стационарная подгруппа точки x и O_x — орбита точки x. Показать, что число элементов в O_x равняется отношению порядков G и G_x.

3. Показать, что $n!$ делится на $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$, если $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ и n, n_i — натуральные числа.

§ 18. Элементарные гармоники

Согласно результатам предыдущего параграфа мы можем ограничиться рассмотрением функций $f(g)$ на «универсальном однородном пространстве» G. Задача состоит в классификации этих функций по отношению к

правому сдвигу:

$$R_{g_0} f(g) = f(gg_0).$$

Имея в виду аналогию с рядами Фурье, постараемся прежде всего ответить на вопрос: какие функции $f(g)$ естественно считать «элементарными гармониками» на G? Согласно той же аналогии мы можем исходить из определяющего уравнения элементарных гармоник

$$R_{g_0} f(g) = \tau(g_0) f(g),$$

где функция $\tau(g)$ является аналогом собственного значения $\lambda_n = e^{in\alpha}$ теории рядов Фурье. При этом, очевидно, функция $\tau(g)$ является гомоморфизмом, или «обобщенной экспонентой», на G.

Если считать $\tau(g)$ числовой функцией, то мы далеко не на всякой группе получим достаточно богатый запас элементарных гармоник. Действительно, выше отмечалось, что некоторые группы вообще не имеют числовых экспонент, кроме $\tau(g) \equiv 1$. Поэтому естественно считать, что $\tau(g)$ — произвольное неприводимое конечномерное либо даже бесконечномерное представление группы G.

Встав на эту точку зрения, мы можем сразу же отметить следующее очевидное обстоятельство. Согласно общей формуле

$$\tau(gg_0) = \tau(g)\tau(g_0)$$

операторная функция $\tau(g)$ сама является «собственной функцией» оператора R_{g_0}. Желая вместо операторной функции рассматривать числовые, мы положим

$$\varphi(g) = (\tau(g)x,\ y), \qquad (*)$$

где x — произвольный вектор из пространства представления $\tau(g)$, y — произвольный вектор из сопряженного линейного пространства и скобка (x, y) означает билинейную форму между этими пространствами.

Функции $(*)$ называются *матричными элементами представления* $\tau(g)$. Матричные элементы всевозможных неприводимых представлений группы G называются для краткости также *матричными элементами группы* G. Естественно ожидать, что всякая элементарная

гармоника является матричным элементом или линейной комбинацией матричных элементов группы G.

Замечание. Пусть $\tau(g)$ — конечномерное представление и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — фиксированный базис в пространстве представления. Тогда имеем

$$\tau(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}(g)e_i.$$

Если f_i — линейный функционал, равный единице на e_i и нулю на всех остальных базисных векторах, то мы имеем

$$\tau_{ij}(g) = (\tau(g)e_j, f_i),$$

где скобка в правой части означает применение функционала f_i. Следовательно, функции $\tau_{ij}(g)$ являются матричными элементами группы G.

Изложенная выше гипотеза о матричных элементах легко доказывается в том случае, когда «собственное значение» $\tau(g)$ является конечномерным представлением. Действительно, пусть $e_1(g), e_2(g), \ldots, e_n(g)$ — базисная система элементарных гармоник, преобразующихся согласно $\tau(g)$. Тогда имеем

$$e_j(gg_0) = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}(g_0)e_i(g),$$

где $\tau_{ij}(g)$ — соответствующая матрица оператора $\tau(g)$. Полагая, в частности, $g = e$ и опуская индекс 0 у элемента g_0, мы находим

$$e_j(g) = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}(g)c_i.$$

Здесь $c_i = e_i(e)$. Согласно сделанному выше замечанию функции $\tau_{ij}(g)$ являются матричными элементами группы G. Мы видим, что элементарные гармоники $e_j(g)$ являются линейными комбинациями матричных элементов.

С другой стороны, естественно предположить, что *всякое неприводимое представление содержится в регулярном.* В частности, если $\tau(g) = \|\tau_{ij}(g)\|$ — конечномерное представление, то, полагая $e_j(g) = \tau_{ij}(g)$ при фик-

сированном i, мы имеем

$$e_j(gg_0) = \sum_{i=1}^{n} e_i(g)\,\tau_{ij}(g_0).$$

Следовательно, функции $e_j(g)$ преобразуются по закону $\tau(g)$, и для конечномерных представлений наше утверждение доказано. Желая исследовать случай бесконечномерных представлений, мы вначале уточним определение неприводимости.

Представление T_g в линейном топологическом пространстве V называется *топологически неприводимым*, если в V не существует замкнутого инвариантного подпространства, отличного от (0) и V. При этом мы предполагаем, что функция T_g непрерывна на V хотя бы в смысле слабой топологии пространства V*).

Теорема 3. *Всякое топологически неприводимое представление группы G может быть вложено в правое регулярное представление группы G, определенное в классе непрерывных функций на G.*

Доказательство. Фиксируем ненулевой линейный функционал f из сопряженного пространства V'. Каждому $x \in V$ поставим в соответствие числовую функцию

$$x(g) = (T_g x, f)$$

на группе G. Тогда элементу $T_{g_0}x$ соответствует функция $x(gg_0)$. Пусть L — множество всех получаемых таким образом функций $x(g)$. Если $x_0(g) \equiv 0$ на группе G, то мы имеем

$$(T_g x_0,\ f) \equiv 0.$$

Замыкание линейной оболочки векторов $T_g x_0$ инвариантно относительно T_g и отлично от V (поскольку ортогонально f). Ввиду неприводимости T_g это замыкание содержит только вектор 0. Следовательно, $x_0 = 0$.

Мы показали, что отображение между V и L взаимно однозначно. Кроме того, при этом отображении операция T_{g_0} переходит в R_{g_0}. Теорема доказана.

---

*) По поводу всей терминологии, касающейся линейных топологических пространств, читатель отсылается к любому современному руководству по функциональному анализу. См., например, [5].

Замечание. Для конечномерных представлений рассуждения, изложенные выше, позволяют получить следующий более точный результат. *Неприводимое представление* $\tau(g)$ *содержится в регулярном столько раз, какова его размерность.* Действительно, пусть L_i — линейная оболочка всех функций $e_j(g) = \tau_{ij}(g)$ при фиксированном i. Выше было показано, что всякая элементарная гармоника, преобразующаяся согласно $\tau(g)$, содержится в геометрической сумме подпространств L_i. В конце этой главы будет показано, что подпространства L_i линейно независимы. Их число равно размерности $\tau(g)$, и в каждом из них представление R_g сводится к $\tau(g)$.

Все изложенные выше построения, разумеется, играют роль наводящих рассуждений. Остается еще фундаментальный вопрос о разложимости R_g на неприводимые представления. Мы опишем сейчас один из наиболее естественных путей решения этого вопроса.

Пусть $d\mu(g)$ — правоинвариантная мера Хаара на группе G. Как мы видели в § 7, такая мера существует, во всяком случае на произвольной группе Ли. Положим

$$\|f\|^2 = \int |f(g)|^2 d\mu(g),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Множество $\mathscr{H} = L^2(G)$, состоящее из всех измеримых функций $f(g)$, для которых $\|f\| < \infty$, является гильбертовым пространством. Формула

$$(f, \varphi) = \int f(g)\overline{\varphi(g)}\, d\mu(g)$$

определяет скалярное произведение в этом пространстве. Используя правую инвариантность меры $d\mu(g)$, сразу получаем, что $(R_{g_0} f, R_{g_0}\varphi) = (f, \varphi)$, т. е. *правое регулярное представление унитарно.*

Согласно теореме 1 мы можем теперь заключить о том, что *представление* R_g *вполне приводимо.* Отсюда появляется надежда, что R_g разлагается на неприводимые представления.

Обращение к классическим примерам прямой и окружности показывает, однако, что при этом могут

встретиться дополнительные аналитические трудности. Действительно, на окружности элементарные гармоники $e^{in\varphi}$ содержатся в гильбертовом пространстве и образуют его ортогональный базис. В то же время на прямой элементарные гармоники $e^{i\lambda x}$ неинтегрируемы с квадратом модуля. Тем не менее хорошо известна процедура, приводящая к интегралам Фурье. В следующей главе мы сумеем выделить группы, ситуация для которых сходна с ситуацией окружности, и построить для них обобщение гармонического анализа.

§ 19. Алгебры и группы, связанные с уравнением

Существует несколько иной аспект рассматриваемых вопросов, особенно важный для приложений, но в настоящее время еще недостаточно разработанный. В математической физике, как известно, часто приходится решать уравнения на собственные значения:

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad (*)$$

где L — линейный оператор, как правило, интегральный или дифференциальный (оператор Лапласа, оператор Гамильтона). Если F — оператор, перестановочный с L, то его изучение дает обычно глубокую информацию о собственных векторах оператора L. Мы рассмотрим в этом параграфе лишь элементарную алгебраическую схему такого подхода.

Если F_1, F_2 перестановочны с L, то этим же свойством обладают их произведение и произвольные линейные комбинации. Следовательно, множество всех операторов, перестановочных с L, образует алгебру. Эта алгебра носит название *коммутаторной алгебры оператора* L. Если F — элемент коммутаторной алгебры и ψ — решение $(*)$, то имеем

$$L(F\psi) = FL\psi = \lambda(F\psi).$$

Следовательно, вектор $F\psi$ является по-прежнему собственным вектором относительно L, с тем же собственным значением, что и ψ. Иначе говоря, пространство V_λ всех собственных векторов с собственным значением λ