§ 20. Лемма Шура

Условимся рассматривать линейные (конечномерные) пространства только над полем комплексных чисел. Следующая простая лемма принадлежит одному из основателей теории представлений, немецкому алгебраисту И. Шуру:

Лемма Шура. *Допустим, что два неприводимых представления T_g, S_g группы G связаны соотношением*

$$AT_g = S_gA, \qquad (*)$$

где A — линейный оператор. Если эти представления неэквивалентны, то $A = 0$; если они эквивалентны, то A определяется однозначно с точностью до умножения на число.

В частности, если $T_g = S_g$, то $A = \lambda I$, где I — единичный оператор.

Доказательство. Пусть X, Y — линейные пространства, в которых действуют представления T, S; тогда мы имеем отображение

$$A\colon\ X \to Y.$$

Пусть X_0, Y_0 — ядро и образ оператора A (т. е. совокупность всех векторов $x \in X$, для которых $Ax = 0$, и совокупность всех векторов Ax, $x \in X$). Ясно, что X_0 инвариантно в X и Y_0 инвариантно в Y. Если $A \neq 0$, то равенства $X_0 = X$ и $Y_0 = (0)$ исключаются. Следовательно,

$$X_0 = (0), \quad Y_0 = Y$$

в силу неприводимости T и S. Полученные равенства означают, что оператор A *взаимно однозначно* отображает X на Y. Следовательно, A^{-1} существует и

$$S_g = AT_gA^{-1},$$

т. е. представления T, S эквивалентны. Докажем единственность оператора A. Поскольку T и S эквивалентны, мы можем отождествить X и Y. Если A и B удовлетворяют условию $(*)$, то оператор $C = B - \lambda A$ удовлетворяет этому условию при любом λ. Как мы видели выше, либо $C = 0$, либо C^{-1} существует. Но если λ — корень уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$, то оператор C вырожден.

Следовательно, в этом случае $C = 0$ и $B = \lambda A$. Лемма доказана.

Последнее утверждение леммы самостоятельно формулируется следующим образом:

Если линейный оператор A перестановочен со всеми операторами неприводимого представления T_g, то он кратен единичному *).

Отметим теперь несколько следствий из леммы Шура.

Следствие 1. *Если группа коммутативна, то все ее неприводимые представления (над полем комплексных чисел) одномерны* **).

Действительно, каждый оператор T_{g_0} перестановочен со всеми операторами T_g и потому кратен единичному. Следовательно, $T_g = \lambda(g) I$. Но в этом случае всякое одномерное направление инвариантно. Следовательно, размерность пространства равна 1.

Следствие 2. *Пусть T_g, S_g — два неприводимых представления группы G. Тензорное произведение*

$$T_g \otimes S_g$$

содержит ненулевой инвариант только в том случае, когда представления T_g, S_g контрагредиентны, и этот инвариант определяется однозначно с точностью до множителя.

Действительно, как мы видели в § 16, тензорное произведение $U_g = T_g \otimes S_g$ может быть реализовано формулой

$$U_g z = T_g z S_g'$$

в классе прямоугольных матриц z. Условие инвариантности ($U_g z = z$) может быть переписано в виде

$$T_g z = z \hat{S}_g,$$

где $\hat{S}_g = S_g'^{-1}$ — представление, контрагредиентное S_g. Следовательно, согласно лемме Шура либо $z = 0$, либо

*) Обычно именно это утверждение называют леммой Шура.

**) Над вещественным полем это неверно. Пример: представление

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

аддитивной группы вещественных чисел. Следовательно, лемма Шура над вещественным полем также неверна (в приведенной формулировке).

T_g, $\hat{S}_g$ эквивалентны, и искомый инвариант определяется однозначно с точностью до множителя.

Замечание. Если отождествить T_g, $\hat{S}_g$, то представление U_g записывается в виде

$$U_g z = T_g z T_g^{-1},$$

откуда ясно, что искомым инвариантом является матрица, кратная единичной. Если вместо U_g рассматривать *дуальное* представление, реализованное в классе линейных форм $l(z)$, то ясно, что искомым инвариантом является форма

$$l_0(z) = \operatorname{sp} z,$$

определяемая с точностью до множителя.

Для формулировки очередного следствия введем вначале следующее определение. Пусть M — произвольное множество матриц в векторном пространстве V. Совокупность M', состоящая из матриц, каждая из которых перестановочна со всеми матрицами из M, называется *коммутаторной алгеброй множества* M (действительно, как следует из этого определения, множество M' является алгеброй).

Следствие 3. *Пусть T_g — вполне приводимое представление в пространстве V, $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_m$, где V_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — неприводимые подпространства. Тогда коммутаторная алгебра представления T_g состоит из всех операторов A, имеющих вид*

$$A = \sum_{i,\, j=1}^{m} \lambda_{ij} C_{ij},$$

где оператор C_{ij} обращается в нуль на всех подпространствах V_k, $k \neq j$, и отображает V_j на V_i, а λ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, — произвольные числа. При этом оператор C_{ij} осуществляет отображение эквивалентности между неприводимыми представлениями в V_i и V_j. Следовательно, если эти представления неэквивалентны, то $C_{ij} = 0$.

Для доказательства достаточно представить все операторы (A, T_g) в блочном виде, соответствующем разбиению $V_1, V_2, \ldots, V_m$, и применить лемму Шура.

В частности, если представление T_g кратно неприводимому представлению τ_g, то оно при подходящем выборе базиса может быть записано в виде

$$T_g = \begin{Vmatrix} \tau_g & & & 0 \\ & \tau_g & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_g \end{Vmatrix},$$

где τ_g — диагональные блоки матрицы T_g. Ясно, что в этом случае все операторы C_{ij} записываются в виде единичных матриц (если V_i отождествляется с V_j) и оператор A принимает вид

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_{11}e & \lambda_{12}e & \dots & \lambda_{1m}e \\ \lambda_{21}e & \lambda_{22}e & \dots & \lambda_{2m}e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1}e & \lambda_{m2}e & \dots & \lambda_{mm}e \end{Vmatrix},$$

где e — единичная матрица порядка n, n — размерность представления τ и λ_{ij} — произвольные числа. Заметим, что после перенумерации базиса эта матрица становится блочно-диагональной с n одинаковыми блоками $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Коммутаторная алгебра имеет в этом случае размерность m^2.

В общем случае мы группируем эквивалентные компоненты $\tau^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, и получаем запись оператора A в блочно-диагональном виде:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{Vmatrix},$$

где каждый блок A_i, $i = 1, 2, \dots, s$, имеет структуру, описанную выше. Коммутаторная алгебра имеет в этом случае размерность $m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_s^2$, где m_i — кратность, с которой встречается неприводимое представление $\tau^{(i)}$.

Сопоставляя полученные результаты, мы видим, что коммутаторная алгебра M' несет в себе большую информацию о структуре представления T_g. Зная M', мы можем легко определить все подпространства, неприводимые относительно T_g, найти их число и размерность. В частности, коммутаторная алгебра M' диагонализуется тогда и только тогда, когда представление T_g не содержит ни одной пары эквивалентных компонент; представление T_g неприводимо тогда и только тогда, когда коммутаторная алгебра состоит из матриц, кратных единичной (обращение леммы Шура) *).

Анализируя проведенные рассуждения, мы видим, что они нигде не опираются на специальные свойства представления, а оперируют с понятиями приводимости и полной приводимости, которые можно перенести на произвольные множества матриц. Эта точка зрения будет несколько подробнее изложена в следующем параграфе.

Упражнения

1. Пусть неприводимое представление T_g сохраняет ненулевую билинейную форму $x'fy$, где штрих означает транспонирование. Показать при помощи леммы Шура, что: 1) матрица f невырождена; 2) матрица f симметрична или кососимметрична; 3) матрица f определена однозначно с точностью до скалярного множителя.

2. Пусть $(\alpha : \tau)$ означает кратность вхождения неприводимого представления α во вполне приводимое представление τ. Показать, что $(\alpha : \tau) = (1 : \hat{\alpha} \otimes \tau)$, где 1 означает единичное представление и $\hat{\alpha}$ означает представление, контрагредиентное α.

3. Показать, что $(\hat{\alpha}: \beta \otimes \gamma) = (\hat{\beta}: \gamma \otimes \alpha) = (\hat{\gamma}: \alpha \otimes \beta)$, где α, β, γ — неприводимые представления и тензорные произведения $\beta \otimes \gamma$, $\gamma \otimes \alpha$, $\alpha \otimes \beta$ предполагаются вполне приводимыми.

4. Показать, что всякое неприводимое (конечномерное) представление группы вращений окружности определяется формулой $e^{in\varphi}$, где n — целое число и φ — угловой параметр в группе вращений с периодом 2π.

5. Показать, что всякое неприводимое (конечномерное) представление группы сдвигов на прямой определяется формулой $e^{\lambda x}$, где λ — произвольное комплексное число и x — аддитивный параметр группы $(-\infty < x < \infty)$ **).

---

*) Напомним, что речь идет о вполне приводимых представлениях.

**) Одномерные представления абелевой группы G называют также *характерами* этой группы.